ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES PARA A PRÁTICA EDUCATIVA

Celia Finck Brandt
Méricles Thadeu Moretti
Organizadores

ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES PARA A PRÁTICA EDUCATIVA

Equipe Editorial

Coordenação editorial	Lucia Cortes da Costa
Revisão	ICQ Editora Gráfica
Capa, Diagramação e Projeto gráfico	Marco Wrobel

Ficha Catalográfica elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

E59e Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa/ Celia Finck Brandt, Méricles Thadeu Moretti (Org.). Ponta Grossa : Ed. UEPG, 2016.
307 p.

ISBN: 978-85-7798-200-4

1. Matemática - ensino. 2. Matemática - aprendizagem. I. Brandt, Celia Finck (Org.). II. Moretti, Méricles Thadeu (Org.). III. T.

CDD: 372.6

Depósito legal na Biblioteca Nacional

Editora filiada à **ABEU**
Associação Brasileira das Editoras Universitárias

Editora UEPG
Praça Santos Andrade, n. 1
84030-900 – Ponta Grossa – Paraná
Fone: (42) 3220-3306
e-mail: vendas.editora@uepg.br

2016

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Na presente coletânea reunimos textos de pesquisadores do Brasil com resultados de pesquisas desenvolvidas no campo da educação matemática ou com reflexões sobre temáticas relacionadas aos processos de ensino, aprendizagem, avaliação ou formação de professores.

O capítulo "Uma experiência de formação continuada de professores licenciados sobre a matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental", de Clélia Maria Ignatius Nogueira, Regina Maria Pavanello e Lucilene Adorno de Oliveira, apresenta os resultados de uma pesquisa realizada durante um curso de formação continuada para licenciados em Matemática do Núcleo Regional de Educação de Maringá, atuantes no programa "Sala de Apoio a Aprendizagem", que teve por objetivos: investigar o conhecimento desses licenciados sobre a Matemática dos Anos Iniciais e verificar os efeitos, em sua prática pedagógica, de um processo de formação continuada. Os instrumentos para a coleta dos dados foram os diários de bordo das pesquisadoras, um questionário inicial com os participantes, o material produzido por eles durante o curso e uma entrevista coletiva ao final. A pesquisa mostrou que o conhecimento dos licenciados é essencialmente procedimental. No decorrer da investigação comprovou-se uma mudança em crenças dos professores quanto aos conhecimentos matemáticos, a adequação das atividades propostas nas Salas de Apoio às possibilidades cognitivas dos alunos e aos objetivos do Programa.

O capítulo "As pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Pesquisa Formação e Educação Matemática (FORMEM)", de Patrícia Sandalo Pereira, tem como finalidade apresentar as pesquisas, os trabalhos publicados em eventos e os projetos financiados desenvolvidos pelos membros do grupo de pesquisa FORMEM desde a sua criação, em 2011, até o ano de 2012. Este grupo está vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Conta com a participação de pesquisadores de outras instituições de ensino, além de estudantes de

pós-graduação, estudantes de graduação e professores de educação básica. Os trabalhos são desenvolvidos na linha de pesquisa de formação de professores, que tem como objetivo investigar sobre a formação docente em seus diferentes espaços e níveis educativos. Como resultados das produções desenvolvidas pelo grupo FORMEM, no período, tem-se quatro dissertações defendidas, três dissertações em andamento e dois projetos de pesquisa aprovados em editais financiados pelo Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), além de vários trabalhos publicados em eventos.

O capítulo “Educação Matemática: em foco o jogo no processo ensino-aprendizagem”, de Andréa Damasceno Raupp e Neiva Ignês Grando, foi construído com base numa pesquisa de abordagem qualitativa, voltada à análise de situações de jogo em sala de aula, envolvendo estudantes de 4ª a 6ª série do ensino fundamental de uma escola da rede privada de ensino de Passo Fundo/RS. Os alunos tinham idades entre 9 a 12 anos. O material de análise foi composto por gravações em vídeo de aulas de matemática por meio da técnica da autoscopia, que “consiste em realizar uma vídeo-gravação do sujeito, individualmente ou em grupo e, posteriormente, submetê-lo à observação do conteúdo filmado para que exprima comentários sobre ele” (SADALLA, 1997, p. 33). Foram organizados episódios[1], a partir dos quais se procedeu à observação dos diálogos, do comportamento e das atitudes dos envolvidos – informações valiosas para a análise das interações e dos processos desencadeados durante as situações de jogos.

O capítulo “Registros orais e escritos: um estudo com alunos e professores de educação de jovens e adultos ao solucionarem problemas de proporção/porcentagem”, de Idemar Vizolli e Maria Tereza Carneiro Soares, volta o olhar para o ensino da matemática para saber, especificamente, como pessoas sem escolarização ou pouco escolarizadas, solucionam problemas de matemática em seu contexto social imediato e quais estratégias utilizam para solucionar problemas que lhes são propostos em situação escolar. Ao tratar de proporção/porcentagem é possível encontrar uma série de outros conceitos e relações,

[1] Um episódio de ensino se constitui num “conjunto de atividades e discussões que tem por objetivo a aprendizagem de um determinado conceito ou aspecto importante do conceito por parte significativa dos alunos” (CARVALHO *apud* MORTIMER, 2000, p. 265).

como, por exemplo, a multiplicação, a divisão, a razão, a fração e a comparação. Neste processo, pode ser relevante também a compreensão de outros conceitos matemáticos, como os de equação e função. Isso possibilita que se pense a proporção/porcentagem como objeto de estudo e não somente como uma ferramenta que existe em função de sua aplicabilidade.

O capítulo "Leitura, escrita e argumentação na educação matemática do ensino médio: possibilidades de constituição de significados matemáticos", de Samuel Edmundo López Bello e Luis Davi Mazzei, discute e explora algumas possibilidades de como a leitura, a escrita e a argumentação na prática pedagógica em matemática podem contribuir à compreensão e constituição de significados próprios do seu campo discursivo[2]. Em um contexto educacional contemporâneo, em que as teorizações estão pautadas por discussões em torno da linguagem, suas significações sociais e seus efeitos em processos de subjetivação[3], considerou-se de extrema importância trazer essas discussões para o âmbito da educação matemática no ensino médio.

O capítulo "A utilização do cálculo mental no ensino fundamental", de Angela Aparecida Pasinato Dalsasso e Tânia Stella Bassoi, apresenta os resultados de um estudo que procura destacar a importância da utilização do cálculo mental no ensino fundamental como uma forma da criança entender as relações numéricas do Sistema de Numeração Decimal (SND) e estimar resultados de problemas matemáticos tanto na vida cotidiana quanto na vida escolar. Buscou-se referências em trabalhos realizados por educadores matemáticos que procuram investigar a relação do aluno com a matemática e a interação aluno-professor na utilização do cálculo mental através de entrevistas realizadas com três crianças do ensino fundamental. As situações de cálculo mental estão ligadas a muitos aspectos da vida cotidiana, como a ida ao supermercado, estimando o gasto e quantidade de comida para uma

[2] Discurso, no contexto deste trabalho e em um sentido foucaultiano, refere-se ao conjunto de expressões verbais identificadas com certas instituições ou situações sociais, como por exemplo o discurso da ciência, o discurso da Matemática, o discurso da sala de aula (SILVA, 2000, p. 43). Ao falarmos do campo discursivo da matemática e da educação matemática nos referiremos, todavia, aos efeitos sociais que produzem os saberes advindos dessas áreas de conhecimento como formas particulares de discurso.

[3] Subjetivação como sentido e criação de subjetividade refere-se propriedades e elementos que caracterizam o ser humano como sujeito. No contexto deste texto, ainda, sujeito será entendido como efeito do discurso e do poder e não mais como aquele de natureza centrada, racional e autônoma do modo como apresentado, particularmente, pelas pedagogias críticas, construtivistas e libertadoras.

reunião familiar, e também como uma forma de auxiliar na compreensão das operações com o SND. Como resultado, verificou-se que ao resolver diferentes situações-problemas o aluno usa seu próprio algoritmo de cálculo mental e concomitantemente reorganiza a fala ao explicar ao professor algumas operações.

O capítulo "Os professores e o ensino de frações no 2º ciclo do ensino fundamental", de Louisianne Christine Bonzanini e Tânia Stella Bassoi, apresenta os resultados de um estudo com professores de duas escolas públicas do município de Cascavel com o objetivo de entender como professores de 3ª e 4ª séries trabalham com seus alunos na aquisição das ideias operatórias básicas sobre frações, sob a luz da teoria de David P. Ausubel, da "aprendizagem significativa", cujo principal argumento é partir daquilo que o aluno conhece. Nesse estudo verificou-se que a aprendizagem significativa para esses professores contradiz o pensamento de Ausubel, uma vez que concepções diferentes sobre conhecimento prévio, materiais manipulativos e situações concretas, continuam reforçando um modelo pedagógico de trabalho fundamentado somente em quantidades contínuas e não em quantidades discretas. Os fracassos de aprendizagem são atribuídos ao ensino de séries anteriores que não deram conta da aprendizagem deste conteúdo. Os resultados reforçam a preocupação inicial com a formação dos professores que ensinam matemática nas séries iniciais do ensino fundamental e confirma a importância de um acompanhamento teórico-pedagógico como forma de fazê-los superar as dificuldades no ensino de frações.

O capítulo "Atividades de modelagem matemática mediadas por vídeo e oficina: uma discussão no contexto da educação", de Lilian Akemi Kato e Valdinei Cezar Cardoso, apresenta dois exemplos de atividades de modelagem matemática mediadas por duas estratégias didáticas de apoio, os vídeos educativos e as oficinas de matemática. Esses dois exemplos oferecem uma gama de possibilidades aos professores e estudantes para a inclusão desse tipo de atividade no currículo escolar, apontando, ainda, algumas vantagens da inserção de diferentes tendências da educação matemática, com vistas à atribuição de significados aos conceitos matemáticos envolvidos por meio do desenvolvimento de problemas com características interdisciplinares.

O capítulo "Relações entre a conceituação da estrutura do sistema de numeração decimal e as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão com registros de representação semióticos do número: a palavra e a escrita arábica", de Celia Finck Brandt e Méricles Thadeu Moretti, apresenta um estudo sobre uma investigação dos padrões de organização da palavra e do numeral arábico, que constituem registros de representação semióticos do número, procurando-se identificar de que forma a estrutura do sistema de numeração decimal posicional torna-se explicitada nesses registros. Isto posto, volta-se para identificar as especificidades das operações cognitivas de produção, tratamento e conversão que podem ser realizadas com esses registros, buscando articulá-las com os padrões de organização da palavra e do numeral arábico. Todo o estudo se volta para o processo de ensino, na organização da prática educativa, visando oportunizar a aprendizagem da estrutura do SND, visto a incompreensão dessa estrutura por crianças, conforme apontado por diversas pesquisas. Os fundamentos teóricos basearam-se nas proposições de Raymond Duval, consideradas como mais adequadas para adentrar e enfrentar a problemática da incompreensão do sistema de numeração decimal posicional pelas crianças. Considera-se de extrema relevância a compreensão da estrutura do SND e sua identificação nos registros de representação que expressam o número, em especial a palavra e o numeral arábico, pois isso significará romper com um tipo de conhecimento que se caracteriza pela atribuição de um nome para cada número, ou seja, uma lexicalização direta. Sua importância reside no fato de que o número é a expressão da medida de um conjunto e seus registros tornam possível comunicar, matematicamente, observações do mundo real por meio de representações matemáticas.

O capítulo "Resolução de problema e matemática no ensino fundamental: uma perspectiva didática", de Ettiène Guérios e Roberto José Medeiros Junior, aborda aspectos didáticos identificados na atividade docente com resolução de problemas e decorrência deles na aprendizagem dos alunos. Situou-se o olhar no aluno, em seus professores e no conhecimento matemático escolar. Os configuramos como uma tríade de elementos triangulados e a resolução de problemas como constitutiva de um caminho de aprendizagem do aluno, articulado com a atividade didática do professor. No contexto do

olhar identificamos implicações que os enunciados dos problemas acarretam no movimento da tríade configurada. Para identificar tais implicações buscamos compreender, sob a ótica pedagógica, a atividade heurística dos alunos no processo de resolução de problemas. O eixo de análise foi estruturado na interface da didática teórica e prática, da heurística e da resolução de problemas, que por sua vez foi considerada como atividade matemática e como metodologia de ensino para alunos do ensino fundamental. Os resultados mostram conflitos, sincronias e assincronias no movimento da tríade que potencializam, ou não, a atividade didática, assim como influências e decorrências de mitos sobre atividades com resolução de problemas. Conclui defendendo que, conforme for o entendimento e a decorrente performance em sala de aula, as relações didáticas estabelecidas na tríade, professor, aluno e conhecimento matemático, no processo de ensinar Matemática por meio da resolução de problemas, são: potencialmente heurísticas, criadoras e motivadoras.

O capítulo "A regra dos sinais: alguns elementos importantes do seu contexto histórico", de Selma Felisbino Hillesheim e Méricles Thadeu Moretti, aborda alguns aspectos da história do número negativo, bem como do surgimento e da consolidação da regra de sinais da multiplicação desses números que se mostram relevantes no contexto histórico geral. Uma história de incertezas, de idas e vindas e de muitas hesitações na aceitação da ideia de número negativo. A introdução conceitual dos números relativos foi um processo lento e surpreendente. A origem da regra de sinais é geralmente atribuída a Diofanto de Alexandria que viveu no século III depois de Cristo[4]. Diofanto não faz nenhuma referência aos números relativos, mas em seu Livro I, *Aritmética,* ele menciona: "Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos" (DIOFANTO, 2007, p. 22).

O capítulo de Ana Lúcia Pereira Baccon e Marceli Behm Goulart, "Formação de professores e o uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de matemática: que elementos considerar?", tem como objetivo apresentar algumas reflexões analíticas sobre a formação de professores e o uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

[4] Não se sabe ao certo o período em que Diofanto viveu, mas de acordo com Eves (2004, p. 207), a maioria dos historiadores o situa no 3º século da nossa Era.

Busca também apontar que elementos devem ser considerados nesse processo, a partir das mudanças provocadas na sociedade contemporânea. Para isso, apresenta quatro modelos de avaliação (GOOS *et al.* (2003); ASSUDE (2007); UNESCO (2002b) e HALL; HORD (2006)) no uso das tecnologias por professores no ensino da matemática e algumas estratégias básicas para o desenvolvimento profissional de professores, especificamente para a integração das TICs (Teconologia de Informação e Comunicação). A partir dos modelos apresentados foi possível perceber alguns elementos que surgiram nesse novo cenário de transformações na sociedade que exige do professor novos conhecimentos e ações. O principal deles aponta que não podemos pensar somente em habilitar os formadores e futuros professores somente para uma formação tecnológica em suas práticas de ensino, mas também para incorporá-la às novas formas de compreensão do ensino e da aprendizagem considerando-a como um processo contínuo**.**

Os conteúdos estatísticos para a escola básica são foco do capítulo "O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso do geogebra: um estudo com professores de matemática", de Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Saddo Ag Almouloud e Maria José Ferreira da Silva, particularmente a construção e interpretação de gráficos com uso do programa computacional Geogebra. O contexto da pesquisa foi a construção de um tutorial para professores desse nível de escolaridade, de forma que pudessem inserir o uso de tal ferramenta em suas aulas, visando favorecer o desenvolvimento do letramento estatístico por seus alunos. A coleta de dados se deu por meio de observação participante e relatos dos participantes em diários de bordo, além da análise do produto final do projeto: o tutorial. Entre os resultados observados cabe citar o grande envolvimento dos professores participantes da pesquisa na construção do tutorial, o fortalecimento das relações interpessoais, caracterizando o grupo colaborativo, mas, principalmente, o aprofundamento dos conhecimentos específicos de conteúdo e dos conhecimentos didático-pedagógicos relativos a esses conteúdos.

Acreditamos na grande contribuição das colaborações dos autores para aqueles que se dedicam à formação matemática dos alunos de educação básica (fundamental e média) e superior. Os professores que ensinam matemática

têm muito a enfrentar na sala de aula em relação à aprendizagem da matemática pelos alunos, razão pela qual resultados de estudos e pesquisas, quando divulgados, podem amenizar essa árdua tarefa e, quem sabe, apontar soluções para superação de suas dificuldades, obstáculos epistemológicos e didáticos.

Celia Finck Brandt
Méricles Thadeu Moretti

CAPÍTULO 01

UMA EXPERIÊNCIA DE FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES LICENCIADOS SOBRE A MATEMÁTICA DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Clélia Maria Ignatius Nogueira
Regina Maria Pavanello
Lucilene Adorno de Oliveira

INTRODUÇÃO

As dificuldades escolares de alunos relacionadas à aprendizagem da matemática podem ser atribuídas a diferentes variáveis, entre as quais a principal é a atuação do professor, dado que a ação docente pode produzir, cristalizar ou superar essas dificuldades. Por sua vez, a principal variável que influencia as possibilidades de atuação do professor é a sua formação inicial e continuada.

Sendo a matemática um conhecimento de natureza cumulativa, os anos iniciais da escolarização são decisivos para a construção de alicerces que sustentem os conteúdos posteriores. Este fato aumenta a responsabilidade dos profissionais que atuam nesta fase educacional, bem como a de seus formadores.

Pesquisas sobre o conhecimento matemático de professores oriundos dos cursos de Pedagogia, responsáveis legais pelo ensino de matemática nos anos iniciais, têm constatado seu conhecimento superficial dos conteúdos necessários a este nível de escolarização. Curi (2005), Pavanello (2002; 2003), Pavanello e Nogueira (2008), Nacarato e Passos (2003), entre outros pesquisadores, têm mostrado que esses docentes tiveram, em geral, muita dificuldade com a matemática durante sua escolaridade, o que possivelmente

influenciou sua opção por uma formação que, aparentemente, não exige grandes conhecimentos na área.

Os debates sobre o conhecimento superficial em matemática dos egressos do curso de pedagogia apontam que além de serem poucas as horas destinadas a esta disciplina nesse curso, estas, em geral, não são ministradas por licenciados na área. Essas discussões têm sido estendidas aos anos iniciais. Surge, então, uma dúvida (tanto no meio educacional quanto no meio acadêmico): quem deveria lecionar matemática neste nível educacional? O licenciado em pedagogia ou em Matemática? Existem escolas particulares que atribuem aos licenciados em Matemática as aulas dessa disciplina na primeira fase do ensino fundamental, apregoando tal fato como um diferencial em relação às demais instituições escolares.

O principal argumento relativo aos benefícios que poderiam advir do ensino de matemática por meio de professores especialistas (os licenciados em matemática) nos cursos de pedagogia (e também nos anos iniciais) é que esses professores possivelmente teriam um conhecimento mais profundo e abrangente dos conteúdos a serem abordados – apesar de se reconhecer que eles carecem de conhecimentos didático-pedagógicos para atuarem neste nível de escolaridade.

Essa crença de que o licenciado em Matemática teria um conhecimento mais abrangente e aprofundado dessa disciplina provavelmente foi determinante para a escolha deste profissional para atuar no Programa de Sala de Apoio a Aprendizagem (SAA), desenvolvido pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED-PR).

Este Programa existe desde 2004 com o objetivo de, segundo a SEED/PR, implantar uma ação pedagógica voltada para enfrentar o tradicional problema que ocorre na transição da primeira para a segunda fase do ensino fundamental: alunos que apresentam dificuldades na compreensão de conteúdos com maior grau de abstração em função da não consolidação dos conteúdos básicos dos anos iniciais. Acrescenta-se a essas questões as lacunas apresentadas no conhecimento matemático com que os alunos chegam a este ano, possivelmente decorrentes da ação pedagógica a que foram submetidos nos anos iniciais do ensino fundamental.

O Programa preconiza atendimento no contraturno com grupos de no máximo vinte alunos por sala, a ser realizado buscando um atendimento individual direcionado a preencher lacunas apresentadas pelos alunos encaminhados às SAA em relação aos conteúdos matemáticos dos anos iniciais. É importante ressaltar que o programa não é caracterizado como reforço dos conteúdos tratados no período regular.

A escolha do licenciado em Matemática para assumir esses atendimentos provavelmente considerou não apenas o suposto conhecimento matemático deste profissional, mas também que sua reconhecida carência de conhecimentos didático-pedagógicos não se constituiria em impedimento ao sucesso de sua empreitada, em função de os alunos estarem cursando a segunda fase do ensino fundamental.

Pedagogos e equipes técnicas dos Núcleos Regionais de Educação (NRE) ficaram encarregados de proporcionar orientação e acompanhamento aos professores atuantes nessas salas. Além disso, desde 2005, quando foram abertas aproximadamente 9.664 turmas de sala de apoio, os professores que nelas atuam vêm participando de cursos de formação continuada.

Atuamos como docentes dos cursos ofertados pela SEED/PR para diversos grupos de professores oriundos das diferentes regiões do estado. Nestes cursos abordamos os conteúdos referentes aos anos inicias. Nos cursos iniciais priorizamos as discussões didático-pedagógicas referentes aos temas *números e operações*, *formas geométricas* e áreas e perímetros, talvez por acreditarmos, até de forma inconsciente, ser esta a principal necessidade dos professores, em sua maioria licenciados em Matemática.

No entanto, no decorrer desses anos observamos que muitos dos professores apontavam dificuldades que descreviam como sendo de seus alunos, mas que percebíamos serem também deles, o que indicava que suas carências não se restringiam aos conhecimentos didático-pedagógicos, abrangiam também os conteúdos propriamente ditos.

Por certo não basta ao professor o conhecimento do conteúdo a ser ensinado para a efetividade de sua ação pedagógica. Entretanto, estudos atuais sobre os conhecimentos necessários ao professor para uma atuação eficaz

em sala de aula – como os de Shulman (1986; 1987), Tardif (2002) e Franchi (1995) – têm enfatizado que o conhecimento do conteúdo da disciplina é uma condição básica para a docência nos diferentes níveis do ensino.

Embora possa parecer que esses autores estão afirmando o óbvio, isto não é verdade porque eles ampliaram o conceito de "conhecimento do conteúdo da disciplina". Shulman (1986; 1987) destaca que este não se resume ao conhecimento de fatos ou conceitos do domínio desta. O conhecimento requer não só a compreensão das formas como estão organizados os conceitos e os princípios básicos da disciplina, como também o domínio do conjunto de maneiras mediante as quais a validade das produções é estabelecida no referido campo do conhecimento.

Isto significa que o professor que vai ensinar matemática deve ter um conhecimento filosófico, histórico e epistemológico sobre esta, para ser capaz de apresentar para seus alunos os conceitos matemáticos e as relações entre eles, fundamentando-se na literatura acumulada na área.

Considerando o conhecimento do conteúdo da disciplina como estabelecido por Shulman (1986; 1987) e que o professor, como salienta Franchi (1995, p. 66), "[...] deve ter à sua disposição *um conhecimento abrangente* que ilumine sua ação", o qual "[...] não pode limitar-se a conteúdos e instrumentos com que trabalhará em sala de aula"; entendemos que o conhecimento da matemática dos anos iniciais não é necessário ao professor apenas para atuar nas SAA, mas também para sua ação docente em geral. Afinal, *mais abrangente* não significa apenas conhecimentos hierarquicamente posteriores ou mais complexos, mas também – e talvez com maior propriedade – os conhecimentos anteriores, aqueles que já assumiram um caráter tão instrumental que o professor sequer reflete sobre eles. Estes conteúdos são, precisamente, os que constituem a matemática para os anos iniciais do ensino fundamental.

Tendo em vista o exposto, além das observações feitas nos cursos de formação continuada que ministramos para a SEED/PR sobre as limitações do conhecimento disciplinar dos professores licenciados em relação à matemática dos anos iniciais, consideramos que seja necessário criar condições para realizar as mesmas observações, mas agora de maneira sistematizada.

Essas condições foram propiciadas pela oferta de um curso de formação continuada sobre a Matemática dos anos iniciais a professores ligados ao Núcleo Regional de Educação (NRE) de Maringá, que, no ano de 2010, estavam atuando em SAA.

Relatamos aqui a investigação realizada com o objetivo de identificar se, de fato, licenciados em Matemática estariam capacitados, do ponto de vista do conhecimento dos conteúdos específicos, para atuar nos anos iniciais. Por outro lado, considerando que nossos sujeitos atuavam em SAA, ampliamos nosso objetivo inicial, buscando também analisar como o aprofundamento nesses conteúdos afetaria sua ação na SAA e no desempenho de seus alunos.

A INVESTIGAÇÃO

Conforme explicitamos anteriormente, o cenário desta investigação qualitativa foi um curso de formação continuada para 23 professores que atuavam em SAA, selecionados segundo os seguintes critérios: a) serem licenciados em Matemática; b) não terem participado de quaisquer dos cursos anteriores ofertados pela SEED/PR; e c) que se comprometessem a participar de todos os encontros teóricos e práticos, além de selecionar e aplicar as atividades relacionadas aos conteúdos do curso a seus alunos e relatar os resultados dessa aplicação. Além disso, os professores deveriam selecionar um aluno para realizar um estudo de caso, elaborando um relatório circunstanciado sobre a evolução do desempenho desse aluno.

Estabelecemos estes critérios porque, em relação ao item A, é comum licenciados em Ciências, com habilitação em Matemática, atuarem como professores desta disciplina; em relação ao item B porque seria prejudicial para a pesquisa o fato de eles terem tido acesso aos conhecimentos objetos de nossa investigação; e, no caso do item C como garantia das condições necessárias ao desenvolvimento da pesquisa.

O curso teve oito encontros quinzenais de 8 horas. Um primeiro encontro foi destinado à apresentação do que seria um Estudo de Caso e como realizá-lo, além de fornecer orientações sobre como elaborar um relatório detalhado das ações realizadas – uma vez que este se constituiria em instrumento de coleta

de informações da pesquisa. O último encontro foi destinado (no período da manhã) a uma avaliação do curso pelos participantes, por meio de uma entrevista em grupo; a parte da tarde foi reservada para apresentação e discussão dos relatos dos estudos de caso realizados.

As quatro horas do período da manhã eram destinadas à apresentação teórica dos temas e à discussão de resultados de pesquisas que abordavam as dificuldades das crianças relativas a cada um deles, como os estudos de Vergnaud (2009), Lorenzato (2006), Fini (2007), Nogueira (2007), Pavanello (2002; 2003) e Nogueira e Signorini (2010), entre outros.

As quatro horas de aula do período da tarde eram destinadas à seleção/elaboração, pelos participantes, de atividades a serem aplicadas em sua SAA, com o objetivo de superar as lacunas observadas em seus alunos. Para efeito da investigação as atividades foram analisadas com o intuito de verificar se os professores estabeleceram relações entre os conteúdos abordados e as causas das dificuldades das crianças, o que indicaria sua compreensão dos conteúdos teóricos discutidos. O relatório foi analisado com o objetivo de identificar se houve melhora na aprendizagem dos alunos.

No que se refere à investigação acerca do conhecimento do conteúdo da disciplina, optamos, neste trabalho, por discutir os resultados agrupando os temas estudados nos seguintes eixos: aritmética elementar, formas geométricas planas e áreas e perímetros. A análise foi efetivada segundo os seguintes descritores: o impacto causado pela apresentação teórica dos conteúdos específicos; o desconhecimento das dificuldades inerentes a cada tema; aspectos didáticos e metodológicos relacionados aos temas. Analisamos, também – porém com menos profundidade – o desconhecimento de aspectos relacionados ao desenvolvimento cognitivo dos alunos.

No primeiro encontro, além dos aspectos metodológicos de um estudo de caso, discutimos como realizar uma avaliação diagnóstica de dificuldades de aprendizagem em Matemática e as possíveis maneiras de atuação para a sua superá-las. No oitavo e último encontro foi realizada uma entrevista em grupo, durante a qual cada participante fez sua análise sobre o curso e as contribuições deste para sua atuação pedagógica, particularmente na SAA.

Como instrumentos de coleta de informações foram utilizados: a) um questionário respondido pelos participantes no primeiro encontro, em que eles descreviam o seu perfil e a sua motivação para participarem do curso e contribuir com nossa investigação; b) um diário de bordo produzido pelas pesquisadoras em cada encontro, da seguinte forma: enquanto uma abordava o conteúdo programado, as outras duas anotavam fatos, falas e reações dos participantes; c) o material produzido pelos professores (portfólio contendo as atividades programadas e relatório comentado do "estudo de caso" realizado); e d) a transcrição da entrevista em grupo realizada no último encontro.

OS RESULTADOS

As respostas ao questionário indicaram que 12 dos participantes possuíam especialização em Educação Matemática, 3 em Didática e Metodologia do Ensino, 3 em Educação Especial e 1 em Gestão Escolar. Quanto ao tempo de atuação no magistério, somente 3 atuavam há mais de 20 anos, os outros se dividindo igualmente no intervalo de 1 a 10 anos e no de 11 a 20 anos. A maioria (10) tinha apenas um ano de atuação na SAA e 5 indicaram ser 2010 o primeiro ano em que nela atuavam. O tempo maior de experiência com o programa foi de quatro anos (1 participante).

O principal motivo por eles apontado para a participação no curso foi seu interesse em obter mais informações sobre como trabalhar na SAA, de modo a ajudar os alunos com dificuldades em matemática. Além disso, indicavam o curso como uma oportunidade para a troca de experiências, a busca por metodologias diferenciadas para a atuação nesse cenário especial e a ampliação de seus conhecimentos.

Nenhum professor indicou a necessidade de compreender melhor os conteúdos trabalhados nos anos iniciais da escolarização, o que nos dá indícios de que acreditavam conhecê-los – sua dificuldade consistindo apenas nos conhecimentos didático-pedagógicos, o que vai ao encontro das crenças que permeiam o ambiente educacional.

Da análise das informações dos diários de bordo apresentamos alguns destaques. O primeiro deles é o desconforto notado entre os professores já no

primeiro encontro, quando, na discussão sobre a elaboração do protocolo de diagnóstico de dificuldades de aprendizagem dos algoritmos das operações, foram alertados de que tais dificuldades poderiam ser consequência de falhas na compreensão do SND. Os professores desconheciam que *os algoritmos se sustentam nas propriedades do SND*, o que já era um forte indicativo de uma deficiência teórica.

Esse indicativo ficou reforçado no encontro realizado na tarde deste dia e que teve por objetivo a elaboração de protocolo para avaliação diagnóstica dos alunos da SAA em relação a aspectos do SND (comparação e ordenação de números, números consecutivos, dúzias, dezenas etc.). Os professores relutaram em selecionar atividades referentes a este tema, argumentando que eram "muito simples", "fáceis demais". Convencidos da importância dessas atividades pela recordação das discussões do período da manhã, a maioria dos participantes expressou o sentimento de estar "fazendo tudo errado" com os alunos, sentimento que foi reiteradamente manifestado cada vez que se defrontaram com lacunas em sua formação.

No segundo encontro, foi realizado um estudo sobre o SND, desde a construção da quantificação até suas propriedades, sustentado teoricamente em Piaget e Szeminska (1981), Nogueira (2007), Nogueira e Signorini (2010), Sinclair (1990), Brizuela (2006), Kamii e Declark (1988), Lerner (1995), Lerner e Sadovsky (1996), entre outros.

As intervenções dos participantes, registradas em nossos diários de bordo, mostraram que eles não sabiam formalizar a definição de sistema de numeração como um conjunto de símbolos e regras que permite representar *qualquer* número. Ao tomarem conhecimento desta definição, os professores afirmavam que o SND era o único sistema de numeração possível. Quando confrontados com outros sistemas, como o romano, argumentavam, em defesa de sua afirmação, que este não permitia representar números de classes elevadas, desconsiderando a existência de sistemas de bases não decimais, como o binário, que é tão eficiente quanto o SND.

Uma revelação impactante para os professores foi que a criação do zero não se deveu à necessidade de um símbolo para representar a ausência

de quantidade, mas sim para marcar uma posição vazia, devido ao aspecto posicional do SND.

Detectamos nos professores a falta de clareza sobre o que significa o aspecto posicional. Ao serem indagados se o sistema de numeração romano é posicional, poucos se manifestaram e os que o fizeram responderam afirmativamente, justificando sua resposta com os numerais romanos IX e XI. Houve surpresa quando afirmamos o contrário, argumentando que, no sistema romano, os símbolos I e X não mudam de valor: continuam valendo, respectivamente, 1 e 10. Demorou certo tempo para eles perceberem que o que caracteriza um sistema posicional é o fato de o valor do algarismo mudar dependendo de sua posição no numeral.

Outro ponto de conflito foi a discussão de resultados de pesquisas, como as de Lerner e Sadovsky (1996) e de Brizuela (2006), que destacam a complexidade do "zero" e as dificuldades das crianças em compreender que este algarismo, quando colocado à direita de um outro qualquer, faz com que o valor deste outro seja multiplicado por 10 (valor posicional).

A complexidade do "zero" se revelou também para os professores quando abordamos a "decomposição dos números em classes e ordens". Conforme já havia sido observado pelas docentes em todos os cursos ministrados anteriormente, também aqui houve quem se confundisse com a questão: "Quantas dezenas há no 'número 1307?" Alguns dos participantes responderam "zero", confundindo a quantidade de dezenas do número (130) com o algarismo da "casa" das dezenas.

No tratamento teórico do SND, foram também apresentadas sugestões metodológicas para o fazer pedagógico em sala de aula. Nesse momento, ficou comprovada a tese de que os licenciados em Matemática carecem de conhecimentos didático-metodológicos, pois pudemos constatar que a maioria dos participantes desconhecia recursos didáticos familiares aos professores dos anos iniciais, como o ábaco, o material dourado, entre outros. Esta constatação foi reforçada no último encontro, quando, na entrevista coletiva, houve a solicitação generalizada de que promovêssemos oficinas específicas para o trabalho com esses materiais, dado que a

utilização desses recursos não foi explorada, mas apenas apresentada como sugestão durante as aulas teóricas.

No período da tarde deste segundo encontro, os professores justificaram a sua despreocupação com a revisão dos conteúdos relativos ao SND por entenderem que isto já estava construído pelo aluno. Relataram terem se surpreendido ao constatar que as dificuldades que seus alunos apresentavam eram exatamente as mesmas diagnosticadas no estudo teórico sobre o SND. Assim, percebemos que eles começaram a dar indícios de compreensão de algumas dificuldades de seus alunos porque ressaltaram que o que parece óbvio ao professor não é para as crianças – concluíram, portanto, ser preciso uma ação pedagógica específica para que eles reelaborem os conceitos em questão.

No período vespertino do terceiro encontro, durante a exposição dos resultados do desempenho de seus alunos no desenvolvimento das atividades sobre o SND, embora persistisse entre os professores o sentimento de que faziam "tudo errado", suas atitudes mudaram: eles procuravam as causas dos erros de seus alunos contextualizando-as teoricamente, o que se constitui como o primeiro passo em direção a uma intervenção que visa superá-los.

Nessa primeira tentativa de compreender as causas dos erros dos alunos duas coisas ficaram aparentes para os professores: a primeira, a diversidade de causas das quais se originam os erros, pois estes são particulares a cada aluno e derivam de lacunas provenientes da sua experiência pessoal. Perceber este fato teve como consequência a constatação de que as atividades realizadas em uma SAA não podem ser sempre padronizadas e comuns a todos. Nesse momento, os professores perceberam a pertinência da discussão sobre o estudo de caso na abertura do curso. A segunda certeza que os professores passaram a ter foi a da limitação de seus conhecimentos para atender as necessidades de seus diferentes alunos.

No que se refere às operações aritméticas elementares, foram vários os impactos provocados pela abordagem teórica. Isto ocorreu porque a maioria dos participantes desconhecia que operação e algoritmo são conceitos distintos: o algoritmo (por eles denominado de "continhas") se referem a um conjunto de procedimentos que leva à execução de uma dada operação, enquanto a

operação implica transformações realizadas sobre números, quantidades, grandezas e medidas.

Esta diferença ficou clara para os professores somente quando mostramos que diferentes situações-problema com os mesmos números podem ser resolvidas com o mesmo algoritmo, ou seja, que na resolução de um problema o cálculo numérico é apenas a menor parte, o essencial é perceber a maneira como os dados devem ser relacionados, isto é, o cálculo relacional (VERGNAUD, 2009).

No entanto, o convencimento desse fato não se deu de imediato, pois houve dificuldades em reconhecer a existência de diferença entre os dois significados da adição (juntar e acrescentar), que realmente é sutil. O que mais contribuiu para que eles percebessem a diferença entre operação e algoritmo foram os diferentes significados da subtração, mas apenas quando foram traduzidos para a linguagem matemática. O que facilitou realmente a percepção da diferença foi a tradução do significado de completar pela sentença matemática: $y + ? = x$, porque os significados de *retirar* e de *comparar* são traduzidos pela sentença $x - y = ?$.

Esta dificuldade dos professores em perceber a diferença entre os significados de uma operação é compreensível, porque eles já instrumentalizaram e naturalizaram a relação entre operação e algoritmo. Esta pode ser uma das razões de eles não entenderem que as diferenças entre os significados das operações não são sutis para as crianças, constituindo-se na principal causa das dificuldades que elas têm em traduzir o enunciado de um problema verbal para a linguagem matemática.

Outra novidade para os professores foi compreender que o grau de dificuldade de um problema está intimamente ligado ao significado das operações nele envolvidas. Para eles, a hierarquia de dificuldade dos problemas era estabelecida por outros fatores, como a ordem de grandeza dos números, sua natureza, a forma de apresentação dos dados e a quantidade de operações a serem realizadas. Isto é ilustrado pela manifestação de um participante de que se “os números são parecidos e a conta que resolve o problema é a mesma, o grau de dificuldade tem que ser o mesmo”.

Nesse momento, apresentamos aos participantes os seguintes problemas:

a) Na sala de aula estão 5 meninos e 8 meninas. Quantas crianças estão na sala de aula?
b) Beatriz comprou uma caneta por R$5,00 e ficou com R$8,00 na carteira. Quanto ela possuía antes da compra?
c) Vanessa tem 5 anos. Suellen é 8 anos mais velha do que Vanessa. Quantos anos tem Suellen?
d) Lucas foi jogar videogame. Ao fim da primeira fase do jogo, ele tinha perdido 5 pontos. Ele, então foi para a segunda e última fase do jogo. Ele terminou o jogo com 8 pontos ganhos. O que aconteceu na segunda fase?

Os professores se espantaram ao constatar que, embora os problemas se resolvam com o mesmo cálculo numérico, eles estão associados a cálculos relacionais diferentes. A consequência pedagógica é a de que é necessário cuidar para não ficar apenas repetindo problemas que requeiram do aluno um único raciocínio.

Após essas discussões a diferença entre os significados da multiplicação e da divisão já foi aceita com mais naturalidade pelos participantes.

Nos encontros vespertinos destinados à elaboração de atividades relativas aos diferentes significados das operações, e considerando ainda a hierarquia de dificuldades dos problemas, os participantes mostraram ter superado a visão de que bastava que efetuassem a leitura da situação-problema para que o aluno a compreendesse e se dispusesse a resolvê-la. Na elaboração das atividades os professores preocuparam-se com questões que levassem o aluno a elaborar conjecturas e que permitissem diferentes possibilidades de solução, o que aponta para o reconhecimento da importância da qualidade do problema proposto.

Essas análises nos permitiram identificar que licenciados em Matemática, a exemplo dos pedagogos, compreendem a matemática para os anos iniciais como essencialmente procedimental, uma vez que o mais importante para eles é a competência em efetuar os algoritmos, independentemente do contexto em que são utilizados.

Existe aí, porém, o que entendemos ser uma contradição: ao considerarem o procedimento tão importante, os professores deveriam se preocupar com

as justificativas que os sustentam. Mas esta preocupação não existe porque, conforme foi constatado, os professores desconheciam que os algoritmos canônicos só são possíveis no SND, porque se sustentam nas propriedades deste sistema.

Exemplificando esta afirmação, os professores, ao serem indagados se seria possível realizar os algoritmos tradicionais com números representados no sistema de numeração romano, ficaram discutindo e conjecturando se bastaria apenas "colocar um número sobre o outro para somar". Mesmo quando lembrados de que o sistema romano não é posicional, houve certa hesitação até que eles percebessem a íntima relação existente entre o algoritmo da adição e o SND.

Em resumo, dado o que relatamos, fica evidente que a dificuldade do licenciado em Matemática com a aritmética elementar não se resume às questões meramente metodológicas. Falta-lhes, de fato, um conhecimento fundamentado do conteúdo da disciplina. Do nosso ponto de vista, esse desconhecimento torna inúteis quaisquer sugestões metodológicas. E mais, possivelmente impede quaisquer mudanças nas práticas pedagógicas utilizadas em sala de aula.

Se, no que se refere ao conhecimento da aritmética elementar (sobre o qual nenhum professor admite possuir limitações), constatamos todas essas dificuldades, o que poderíamos esperar dos conhecimentos de geometria e medidas, os quais os professores admitem desconhecer com a maior naturalidade possível?

Nos dois encontros (6º e 7º) destinados à discussão teórica do tema "geometria e medidas", em que foram abordados os tópicos *Figuras geométricas planas* e Áreas e *perímetros*, ficou evidente a aproximação entre os licenciados em Matemática e os pedagogos no que se refere aos conhecimentos deste ramo do conhecimento abordados nos anos iniciais. Nossas observações indicaram que os participantes de nossa investigação, assim como seus colegas dos demais cursos ofertados pela SEED/PR, quando lhes foram apresentadas diversas formas geométricas planas, praticamente só foram capazes de reconhecer e nomear adequadamente aquelas comumente apresentadas nos livros didáticos.

Os conhecimentos dos professores se limitaram aos triângulos, quadriláteros e aos polígonos regulares, inclusive se surpreendendo com a possibilidade de um quadrilátero ser côncavo. Isto significa que a própria definição de polígono não está bem estabelecida entre eles.

Mesmo quando conseguiam nomear corretamente um polígono, houve professores que não foram capazes de explicitar os critérios utilizados para este reconhecimento, ou seja, não foram capazes de descrever suas propriedades. Dificuldades estas que são exatamente as mesmas constatadas em nossa atuação em cursos de formação continuada para professores licenciados em Pedagogia.

A classificação dos quadriláteros foi um tema que provocou muita discussão, havendo professores que relutaram em aceitar que todo quadrado pode ser classificado como um losango e também como um retângulo. Compreender que todo retângulo pode ser um caso particular do paralelogramo foi algo que apresentou dificuldades para vários dos participantes. Nesse momento foi explorado o fato de que algumas afirmações em matemática, como, por exemplo, a de que "todo paralelogramo é um trapézio", serão verdadeiras ou falsas dependendo das definições consideradas para estas figuras. A compreensão de uma matemática exata e com definições únicas que só possibilitam afirmativas mutuamente excludentes ficou abalada.

Estabelecer outro significado para ângulo, além da interpretação usual de "abertura entre duas retas", também foi algo novo para os licenciados. Constatar que um ângulo pode ser entendido como "mudança de direção", significado que, de acordo com a nossa experiência, é bastante acessível aos pedagogos, só foi possível para alguns dos participantes após a realização de atividades práticas, como dar alguns passos em uma direção e, em seguida, efetuar um "giro de meia volta".

No que se refere às medidas, confirmamos, também, o que vínhamos constatando há algum tempo: a impossibilidade de entender como independentes as medidas da área e do perímetro de uma determinada figura plana. Neste caso, as dificuldades dos participantes são similares, não apenas as de professores dos anos iniciais, mas também as de crianças e adolescentes estudados por Piaget *et al*. (1995): a maioria acredita que existe uma relação fixa entre a área e o perímetro de uma dada figura.

Assim, ao apresentarmos um paralelogramo construído com canudos de refrigerante que submetemos a uma deformação (alterando sua altura), os professores afirmavam que a área e o perímetro não eram alterados "porque os lados continuavam os mesmos". Apenas quando a transformação efetuada na figura foi tal que a altura ficou praticamente reduzida a zero é que eles se convenceram de que a área estava sendo gradativamente diminuída.

Os participantes relutaram, também, em admitir que duas figuras de formas diferentes pudessem ter a mesma área, o que ficou evidente em atividades do tipo: dividir duas folhas de papel sulfite, uma pela sua diagonal e a outra pela mediatriz de um dos seus lados, e comparar as áreas das figuras resultantes. Mesmo sabendo que tanto a área do triângulo gerado pela divisão pela diagonal como a do retângulo gerado na segunda divisão representavam, isoladamente, metade da área do retângulo inicial constituído pela folha de papel sulfite, os participantes hesitavam em admitir a igualdade das áreas. Foi preciso recortar o triângulo, recompor suas partes formando um retângulo e sobrepô-lo naquele que foi gerado pela divisão da folha de papel através da mediatriz de um dos seus lados.

De maneira análoga ao que acontece com os conteúdos aritméticos, também no que se refere à geometria pudemos constatar que a concepção dos licenciados em Matemática é procedimental. Isto fica explicitado pela maneira como eles definiram o perímetro de uma figura: "perímetro é a soma dos lados". Neste caso, o conceito é representado pelo procedimento usado para determinar a medida do perímetro no caso dos polígonos. Quando afirmamos que a definição de perímetro não era essa, os professores hesitaram, mesmo quando indagamos, para auxiliar sua reflexão: "Circunferência tem perímetro? E tem lado?". Para muitos dos participantes foi novidade interpretar o perímetro como a medida do contorno da figura.

A reação dos professores às discussões teóricas sobre geometria expressa nos encontros vespertinos foi semelhante à ocorrida quando das discussões sobre o SND, ou seja, houve "espanto" ao constatarem que nem sempre os conceitos geométricos são abordados de forma adequada com os alunos. Descobriram ser possível um ensino mais prazeroso e eficaz da geometria utilizando materiais simples.

Em uma dessas tardes, uma professora participante do grupo trouxe algumas contribuições do *origami* ao ensino da geometria. Durante a realização das dobraduras, ficaram aparentes algumas utilizações equivocadas de termos geométricos, mas alguém sempre relembrava os estudos teóricos para as devidas correções. Os professores relataram, ainda, as dificuldades dos alunos com a realização das atividades geométricas elaboradas e aplicadas anteriormente, destacando, todavia, como foram importantes. Nesse momento, um participante lamentou não ter se preocupado, durante muito tempo, com o ensino da geometria, por acreditar que "dava para ficar para depois", o que foi corroborado pelos demais.

No primeiro encontro, após discutirmos com os professores o que constitui um estudo de caso, apresentando sugestões de protocolos para diagnóstico das dificuldades de aprendizagem em matemática, os docentes foram orientados a selecionar um dos seus alunos como um caso a ser estudado. Nós orientamos que eles deveriam, após selecionar um aluno, seguir os seguinte passos: realizar uma entrevista com seu professor de sala regular de acordo com um roteiro pré-estabelecido (protocolo diagnóstico); aplicar uma avaliação elaborada por nós, referente aos conteúdos matemáticos dos anos iniciais (protocolo para estudo de caso); e de posse dessas informações, estabelecer as dificuldades do aluno, procurar suas causas e formular uma proposta de intervenção visando superá-las.

Após a aplicação das atividades propostas o professor deveria entregar um relatório no qual constassem as atividades realizadas pelo aluno no decorrer da intervenção e as observações do professor sobre as atitudes do aluno durante a solução das questões propostas, particularmente suas certezas, dúvidas e hesitações. Finalmente, deveria constar, neste portfólio, uma avaliação do professor sobre os resultados obtidos com a sua intervenção.

O último encontro vespertino era destinado à apresentação dos estudos de caso, conforme o combinado. No entanto, nenhum dos docentes realizou a tarefa solicitada. Alguns deles apresentaram apenas o protocolo para estudo de caso com as respostas do aluno; outros apenas algumas atividades feitas com seus alunos. Nenhum apresentou, por escrito, as observações efetuadas durante sua intervenção. Eles apenas comentaram oralmente o que havia

acontecido, enfatizando sempre os benefícios advindos do trabalho realizado. Apenas dois dos participantes apresentaram o protocolo diagnóstico preenchido pelo professor da sala regular e o protocolo de estudo de caso preenchido pelo aluno. Desse modo, a análise do desempenho dos alunos ficou inviabilizada.

Finalizando nossa análise, resta comentar a entrevista coletiva feita com os professores, na qual solicitamos uma avaliação do trabalho realizado. As respostas dos professores convergiram a respeito da validade do curso e das mudanças em sua prática, que resultou em maior participação e interesse dos alunos e, consequentemente, em melhor aprendizagem.

Indagamos suas impressões sobre a importância do conhecimento teórico, uma vez que, em suas respostas ao questionário inicial, todos relataram que sua motivação para participar do curso era de caráter metodológico, nenhum deles mencionando a necessidade de ampliar seus conhecimentos específicos da disciplina. No fim, os participantes foram unânimes em admitir essa importância. Afirmaram, também, desconhecer quase que por completo os conteúdos específicos da matemática dos anos iniciais, mesmo possuindo clareza instrumental dos mesmos. Porém, mesmo reconhecendo a importância do conhecimento teórico, nos solicitaram a oferta de um curso sobre procedimentos metodológicos com diferentes recursos didáticos, como material dourado, ábaco, jogos etc.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossas constatações põem em cheque o argumento de que os licenciados estão mais aptos a trabalhar com os conteúdos matemáticos nos anos iniciais da escolarização e, como consequência, também as escolas que apregoam o fato de atribuírem a eles as aulas dessa disciplina como um diferencial.

Nossa pesquisa evidenciou que o conhecimento dos licenciados sobre a matemática dos anos iniciais é essencialmente procedimental e isto se constitui em um problema que os leva, por exemplo, a confundir a competência em operar os algoritmos com a compreensão dos conceitos, de modo que utilizar corretamente os algoritmos torna-se o principal critério para avaliar a aprendizagem de seus alunos. Sob esta ótica a matemática fica reduzida ao

cálculo ou à execução de algoritmos, simplesmente desprezando o fato de este ramo do conhecimento fornecer modelos para representação e compreensão do mundo em que vivemos.

Além disso, a falta de um conhecimento fundamentado do conteúdo da disciplina impossibilita ao professor, entre outras coisas, diagnosticar as causas dos erros dos alunos de modo a criar metodologias alternativas quando a habitualmente utilizada não é acessível a um determinado estudante.

O desconhecimento dos fundamentos dos conteúdos específicos faz ainda com que o professor se apegue a metodologias conhecidas por não conseguir estabelecer relações entre uma nova sugestão metodológica e o conteúdo a ser explorado por seu intermédio. Por exemplo, não adianta apresentar as possibilidades didáticas do material dourado a um professor que não conhece bem os princípios do SND, pois ele apenas irá se limitar a reproduzir os exemplos apresentados por quem está ensinando.

O fato de os participantes de nossa pesquisa terem solicitado um "curso" sobre como utilizar didaticamente o ábaco e o material dourado apenas reforça nossa constatação de que eles não conheciam os princípios do SND e que, mesmo depois do curso terminado, ainda não superaram suas limitações relativas ao tema. Ora, sem uma compreensão da aritmética não é possível o conhecimento do conteúdo de álgebra, por exemplo. Assim, como podem os licenciados atuar pedagogicamente com a álgebra dos anos finais do ensino fundamental sem levar em conta que esta generaliza os temas aritméticos?

Em geral, discute-se que uma das deficiências na formação dos licenciados é que em seus currículos não constam conteúdos pedagógicos dos temas relacionados aos anos finais do ensino fundamental. Algumas soluções propostas têm sido apresentadas e mesmo implantadas para tentar solucionar essa questão. Todavia, a maioria destas se sustenta, quase que exclusivamente, na inclusão, nos currículos dos cursos de licenciatura em Matemática, de disciplinas de caráter didático-metodológico e de maior carga horária destinada aos estágios supervisionados.

Não estamos aqui desvalorizando essas ações, ao contrário, entendemos que elas são muito importantes. Nossa questão também não é, absolutamente,

defender o argumento de matemáticos que se opõem à educação matemática, segundo os quais "*basta saber matemática para ensiná-la*".

Concordamos, porém, com Shulman (1986): é imperioso que os professores possuam um conhecimento abrangente do conteúdo da sua disciplina, afirmamos, no caso dos professores licenciados em Matemática, que os tópicos referentes aos anos iniciais são parte integrante deste, mesmo quando não constam explicitamente nos programas curriculares dos níveis de escolarização em que prioritariamente os docentes irão atuar.

Apontarmos que somente o fato de ser licenciado em Matemática não garante a este docente ter os conhecimentos necessários para atuar nos anos iniciais de escolarização, não significa que estejamos referendando a escolha do licenciado em Pedagogia para esta função. Afinal, existem inúmeras pesquisas que mostram que a formação inicial destes últimos falhou em lhes proporcionar os conhecimentos de matemática necessários a sua ação docente, não apenas no tocante aos conteúdos como também a sua abordagem pedagógica em sala de aula, fato este que dificulta sua atuação e explica tanto sua dependência em relação aos livros didáticos quanto sua incapacidade em avaliar a qualidade destes. Apontam ainda que, embora nos cursos se discuta a dimensão política da educação e a necessidade de mudanças na prática pedagógica, não se proporciona aos futuros professores o conhecimento teórico-prático essencial a essas mudanças.

Concordamos com Campos (1999), quando afirma que a formação do professor precisa tomar como ponto de referência a preparação profissional e o exercício futuro da profissão, e que

> Ninguém facilita o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de aprimorar em si mesmo. Ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina, a constituição de significados que não compreende nem a autonomia que não pôde construir. (CAMPOS, 1999, p. 7)

Seria por certo ingenuidade acreditar que um aluno egresso de qualquer curso de formação de professores estaria, por melhor que fosse o curso, completa e definitivamente preparado para exercer sua atividade profissional. Toda formação é provisória numa sociedade que não permanece estática, mas que se transforma pela atuação do homem e pela evolução do conhecimento.

Apesar disso, pautando-nos na afirmação anterior de Campos (1999) e em nossos estudos e pesquisas anteriores, consideramos que a formação necessária para o professor que irá realizar a iniciação à matemática na escola básica, de modo a produzir uma prática pedagógica que contribua para a construção dos saberes matemáticos pelos alunos, deve contemplar:

• Conhecimentos relativos à matemática escolar: para que o professor consiga ultrapassar o paradigma da transmissão do conhecimento que privilegia a linguagem em lugar do pensamento, que enfatiza a aprendizagem de termos, definições e algoritmos ao invés de estimular o estabelecimento de relações, a busca de semelhanças e diferenças – enfim, das regularidades e dos padrões, atividades estas que, entre outras, constituem o cerne do pensamento matemático. O docente precisa conhecer, de maneira aprofundada, os conceitos e as propriedades referentes aos conteúdos com os quais ele vai trabalhar, bem como sua história. Esse conhecimento é essencial para que o professor possa ele mesmo perceber e levar seus alunos a perceberem a matemática como um campo de conhecimento dinâmico e aberto.

• A construção histórica do conhecimento: conhecer a história da matemática é fundamental para que os professores compreendam que o conhecimento matemático não foi construído todo de uma só vez, num curto período de tempo. Pelo contrário, muitos conceitos levaram um longo tempo para que pudessem ser compreendidos e sistematizados, o que atesta sua complexidade e sua dificuldade de apreensão. Conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos possibilita ao professor compreender melhor alguns aspectos de sua própria aprendizagem e a da aprendizagem de seus alunos. Assim, ele poderá organizar melhor a mediação entre a matemática formal da escola e a matemática enquanto atividade cotidiana.

• Conhecimento aprofundado dos princípios que regem o desenvolvimento e a aprendizagem e do processo de construção de conhecimentos matemáticos: esse conhecimento asseguraria ao futuro professor: uma aprendizagem significativa e aplicada desses princípios; a capacidade de respeitar diferenças (de estilo cognitivo, de ritmo de aprendizagem, de formas de expressão) e; a opção por uma teoria de aprendizagem para sustentar sua ação pedagógica. Além disso, evitaria que seu discurso fosse desconectado de sua prática.

• Conhecimentos didático-metodológicos: o futuro professor deve conhecer e analisar diferentes alternativas didático-metodológicas (recursos eletrônicos; diferentes linguagens e materiais) e compreender suas possibilidades, suas limitações e sua adequação aos objetivos que se pretende alcançar por seu intermédio, como a compreensão de noções, conceitos, processos e fenômenos matemáticos. Isso significa que o futuro professor deve ter a oportunidade de participar de um processo de aprendizagem em matemática baseado na construção pessoal e resultante de um processo experiencial, em que lhe sejam oferecidas possibilidades de comparar, analisar e relacionar os conceitos matemáticos apresentados sob diferentes formas (auditiva, visual, cinestésica), dando significado pessoal às novas aquisições.

• Conhecimentos sobre as possíveis inter-relações dos diferentes temas matemáticos, tanto entre si e com os demais ramos do conhecimento: isso possibilitaria ao futuro professor perceber que certos conteúdos específicos de determinada área podem facilitar aquisições ou ajudar na superação de dificuldades em outra(s) área(s).

• A integração permanente e contínua entre teoria e prática, desde o início do curso de graduação, em todas as disciplinas do currículo de formação profissional, de modo a propiciar situações de aprendizagem significativa aos futuros professores, tanto nas áreas de conteúdo específico como nas áreas de fundamentos educacionais. O estágio curricular deve ser caracterizado como residência escolar com efetiva participação, observação em sala de aula, gerenciamento do tempo e do espaço pedagógicos e dos recursos didáticos de apoio; isto tudo durante tempo suficiente para enfrentar situações diferenciadas e imprevistas, sempre sob a supervisão da escola onde é realizado o estágio, a qual deverá participar da avaliação final do futuro professor.

• O desenvolvimento de estudos e pesquisas: é extremamente importante que, nas diferentes etapas de seu desenvolvimento profissional, o professor seja colocado em contato com o acervo de pesquisas existentes na área, tanto para compreender melhor o fenômeno educacional em seus diferentes aspectos, como para poder refletir em que sentido e com que limites tais investigações podem auxiliá-lo em sua prática profissional. A realização de estudos e pesquisas é necessária para que o futuro professor experimente um novo paradigma

educacional, baseado na pesquisa e na reflexão, no qual as contradições não sejam evitadas, as dúvidas sejam naturais, os erros normais e os conflitos encarados como possibilidades de ascensão para novos patamares.

Embora os atuais cursos de formação de professores (seja a licenciatura em Matemática ou em Pedagogia) não venham sendo capazes de proporcionar aos docentes os conhecimentos necessários para orientar a aprendizagem matemática dos alunos dos anos iniciais, não podemos afirmar que eles estejam inevitavelmente fadados a desenvolver uma prática pouco eficiente. Entretanto, sua competência profissional está diretamente relacionada à prática de refletir sobre sua ação pedagógica e à determinação em complementar sua formação inicial segundo as diretrizes aqui apontadas.

REFERÊNCIAS

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança:** explorando notações. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CAMPOS, M. M. A formação de professores para crianças de 0 a 10 anos: modelos em debate. **Educação e Sociedade**, Campinas, v. 20, n. 68, p. 126-142, Dez. 1999.

CURI, E. **A matemática e os professores dos anos iniciais**. São Paulo: Musa, 2005.

FINI, L. D. T. Aritmética no ensino fundamental: análise psicopedagógica. In: SISTO *et al*. (Orgs.). **Dificuldades de aprendizagem no contexto psicopedagógico**. Petrópolis: Vozes, 2007, p. 60 – 78.

FRANCHI, E. P. A insatisfação dos professores: conseqüências para a profissionalização. In: FRANCHI, E. P. (Org.). **A causa dos professores**. Campinas: Papirus, 1995.

KAMII, C.; DECLARK, G. **Reinventando a aritmética:** implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1998.

LERNER, D. de Z. **A matemática na escola: aqui e agora.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, C.; SAIZ, I. *et. al*. **Didática da Matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p.73-155.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A Geometria nas séries iniciais:** uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

NOGUEIRA, C. M. I. **Classificação, seriação e contagem no ensino do número:** um estudo de epistemologia genética. Marília: Oficina Universitária Unesp, 2007.

NOGUEIRA, C. M. I.; SIGNORINI, M. Crianças, algoritmos e o sistema de numeração decimal. **Investigações no Ensino de Ciências** (IENCI), Porto Alegre, v. 15, n. 2, p. 259-274, 2010.

PAVANELLO, R. M. A pesquisa na formação de professores de matemática para a escola básica. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, n. 15, p. 8-13, 2003.

PAVANELLO, R. M. Formação de professores e dificuldades em matemática. In: MACIEL, L. S. B.; PAVANELLO, R. M.; MORAES, S. P. G. (Org.). **Formação de professores e prática pedagógica**. Maringá-PR: EDUEM, 2002, p. 65-80.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Entre a formação de professores que temos e a que queremos: caminhos possíveis. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION – ICME, 11th, 2008, Monterrey. Trabalho apresentado no Discussion Group 20 (DG20).

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

PIAGET, J. *et al*. **Abstração reflexionante:** relações lógico-aritméticas e ordens das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

SINCLAIR, A. A notação numérica na criança. In : SINCLAIR, H. *et al*. **A produção de notações na criança:** linguagem, números, ritmos e melodias. São Paulo: Cortez, 1990.

SHULMAN, L. S. Those who understand: the knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**. v. 15, n. 2, p. 4-14, Fev. 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e formação profissional**. Petrópolis-RJ: Vozes, 2002.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino de matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. UFPR, 2009.

CAPÍTULO 02

AS PESQUISAS DESENVOLVIDAS PELO GRUPO DE PESQUISA FORMAÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (FORMEM)

Patrícia Sandalo Pereira

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas o tema "formação de professores" tem sido o foco de intensas discussões políticas e educacionais em encontros, seminários e fóruns. Várias pesquisas foram realizadas sobre a formação inicial e continuada de professores. Elas problematizam diversos aspectos da formação, além de trazer novos elementos condutores às reflexões acerca do processo de formação de professores.

O grupo FORMEM foi criado em 2011. Tem como líder a Profa. Dra. Patrícia Sandalo Pereira e conta com a participação de pesquisadores de diversas instituições de ensino, além de estudantes de pós-graduação, estudantes de graduação e professores de educação básica.

Possui uma única linha de pesquisa: formação de professores, cujo objetivo é investigar sobre a formação docente em seus diferentes espaços e níveis educativos. Desde sua criação até o ano de 2012 as produções desenvolvidas pelo FORMEM foram: quatro dissertações (já defendidas), três dissertações estão em andamento e dois projetos de pesquisa aprovados em editais financiados pelo CNPq e CAPES, além de trabalhos aprovados em diversos eventos.

DISSERTAÇÕES PRODUZIDAS

A) MIOLA (2011)

Em 2011 a acadêmica Adriana Fátima de Souza Miola defendeu a dissertação "Uma análise de reflexões e de conhecimentos construídos e mobilizados por um grupo de professores no ensino de números decimais para o sexto ano do Ensino Fundamental".

A pesquisa buscou responder a seguinte questão: a partir da constituição de um grupo de professores e pesquisadores, quais conhecimentos e práticas docentes devem ser colocados em ação com foco no ensino de números decimais no sexto ano do ensino fundamental?

O objetivo geral foi analisar as reflexões sobre as práticas docentes e os conhecimentos construídos e mobilizados por um grupo de professores durante a realização de encontros com foco no ensino de números decimais no sexto ano do ensino fundamental.

Visando alcançar esse objetivo foram traçados os seguintes objetivos específicos: 1) Identificar, durante a realização dos encontros, os conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares dos professores sobre o ensino de números decimais; 2) analisar as inferências acerca da elaboração do planejamento feito pelo grupo sobre a prática pedagógica dos professores no ensino de decimais; e 3) analisar as inferências acerca do desenvolvimento do planejamento elaborado pelo grupo sobre a prática pedagógica dos professores no ensino de decimais após a aplicação em sala de aula.

A justificativa da escolha do conteúdo "números decimais" deveu-se ao fato de que esse tópico começa a ser trabalhado, em geral, nos anos iniciais do ensino fundamental (4º e 5º anos) e é retomado nos dois anos subsequentes (6º e 7º anos) de forma mais sistemática, sendo revisto depois em diferentes momentos nas demais séries do ensino fundamental e do ensino médio.

Os dados foram coletados por meio de encontros realizados no Laboratório de Ensino de Matemática (LEMA) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). O LEMA contribuiu como espaço de reflexão e discussão sobre ensino e aprendizagem sobre o tema, proporcionando aos

professores a oportunidade de trocar ideias e elaborar, de forma criativa e prática, uma sequência de atividades – o que contribuiu, por sua vez, para o enriquecimento das aulas dos referidos professores, cumprindo com o papel social da universidade através de sua integração com a comunidade.

Os professores que participaram da pesquisa estiveram vinculados ao LEMA na Formação e na Prática do Professor.

Os encontros foram organizados com os objetivos de conhecer as crenças e concepções dos professores acerca do ensino de números decimais e criar um ambiente de discussão, de troca de experiências, de respeito e interesse a partir de suas experiências e conhecimentos.

Foram realizados seis encontros com seis professores da rede pública municipal de Campo Grande (MS), nos quais, juntamente com duas pesquisadoras, discutiu-se e elaborou-se uma sequência de atividades com material didático manipulável.

O primeiro encontro objetivou levantar e discutir os conhecimentos dos professores sobre os números racionais, dando especial atenção à representação decimal. A partir daí o grupo elaborou, conjuntamente, um planejamento para ser trabalhado com os alunos – caso necessário, o planejamento teria de ser reelaborado.

Esse primeiro encontro teve, ademais, o objetivo de apresentar à comunidade o LEMA, onde foram efetivados os encontros. Para criar um ambiente de discussão, propusemos aos professores algumas atividades relacionadas com o tema proposto. Essas atividades envolviam situações reais de sala de aula.

A intenção era colocar o grupo diante de erros enfrentados por alunos, de modo a levantar possíveis causas para eles. As atividades também apresentavam aspectos do conteúdo (no caso, decimais) além da didática que lhe é pertinente. As questões também tinham a intenção de levar os professores a refletir sobre a maneira que ensinam para, a partir disso, repensar a forma de ensinar esse conteúdo e de compreender os significados do algoritmo, refletindo, sobretudo, a respeito das dificuldades mais frequentes apresentadas pelos alunos.

Durante os demais encontros o grupo elaborou textos relatando suas experiências no ensino de números decimais envolvendo material manipulável, produziram também um material didático para o ensino de números decimais e, ainda, uma sequência de atividades para o uso do material, a qual foi aplicada em sala de aula. Os resultados foram posteriormente discutidos no grupo.

Os seis professores atuavam nas escolas públicas de Campo Grande (MS). A opção por realizar esse estudo com professores da rede pública deu-se pelo fato de que, muitas vezes, esses profissionais são obrigados a cumprir jornadas duplas ou triplas, de modo que, geralmente, não possuem oportunidades para o estudo.

Como referência para a organização e para a análise dos dados foi utilizado o modelo teórico desenvolvido por Lee Shulman, o qual trata da base de conhecimentos para o ensino, focando três vertentes: o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular. Os três aspectos se mostraram pertinentes para a análise do conhecimento dos professores.

O conhecimento específico do conteúdo refere-se ao entendimento do professor em relação a sua disciplina, incluindo a informação factual, a organização de princípios e a identificação, a definição e a discussão de conceitos. O conhecimento pedagógico do conteúdo abrange as diferentes formas de representações, compondo-se de analogias das quais o professor dispõe para facilitar a aprendizagem do aluno. Já o conhecimento curricular envolve o conhecimento sobre os materiais que podem ser utilizados para o ensino de uma disciplina específica.

Os dados coletados foram analisados através da "Metodologia de Análise de Conteúdo" (BARDIN, 2008). A autora afirma que a análise de conteúdo busca a formulação de descobertas com relevância teórica, ou seja, um dado sobre determinado conteúdo tem que estar relacionado, pelo menos, a um segundo dado, implicando, portanto, comparações contextuais. Essas comparações devem ser direcionadas pela sensibilidade, pela intencionalidade e pela competência teórica do pesquisador.

O referencial teórico utilizado para transcrição e análise dos dados se baseou em Shulman (1986; 1987). Seis encontros realizados para a efetivação dessa tarefa a partir dos quais foram estabelecidas as seguintes categorias de conhecimento: a) conhecimento conceitual dos números decimais; b) conhecimento das operações com números decimais; c) conhecimento das relações entre a representação fracionária e decimal; d) conhecimento do material manipulável elaborado para o ensino de números decimais.

Em relação ao primeiro e segundo objetivos específicos, os resultados revelaram a necessidade de um saber mais específico para a construção do conhecimento pedagógico e curricular do conteúdo, conforme defendido por Wilson, Shulman e Richert (1987).

Durante o desenvolvimento do segundo e do terceiro objetivos específicos – quando houve discussões para a elaboração e o desenvolvimento do planejamento – os professores foram levados a refletir sobre a importância tanto do conhecimento pedagógico como do conhecimento matemático, além das dificuldades dos alunos, das concepções prévias e das diferentes formas de abordar um conteúdo.

Os resultados revelaram, também, a necessidade de readequação dos cursos de formação continuada, buscando prover o que se acredita ser uma carência. Os cursos de formação continuada devem atender as angústias, os interesses e as necessidades do professor, para que seja possível uma reflexão e, consequentemente, mudanças na prática de cada um.

Os resultados mostraram, também, a necessidade de ambientes que possibilitem discussões entre professores, principalmente relacionadas à elaboração de planejamentos. A pesquisa apontou ainda que os materiais didáticos são favoráveis ao ensino e à aprendizagem dos números decimais.

O trabalho em grupo contribuiu para que os sujeitos expusessem suas dúvidas, suas experiências e seus conhecimentos. Embora apenas o conteúdo de números decimais tenha sido abordado, acreditamos que as reflexões produziram efeitos em vários aspectos do exercício da profissão.

O estudo valorizou a importância das discussões em grupo, principalmente quando da elaboração de um planejamento, evidenciando o papel fundamental

da formação continuada na prática do professor, bem como suas expectativas com relação aos cursos. Para além disso, mostrou a importância dos diversos conhecimentos que podem ser construídos durante a formação continuada quando essa valoriza a participação dos professores.

B) NOGUEIRA (2012)

Em 2012 a acadêmica Kely Fabricia Pereira Nogueira realizou a pesquisa "A prática como componente curricular nos cursos de licenciatura em matemática: entendimentos e alternativas para sua incorporação e desenvolvimento", levada a efeito no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e em nível de mestrado, na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). As discussões a respeito da preparação e da formação dos docentes apresentaram propostas importantes e, às vezes, contundentes, tendo em vista diversas políticas públicas.

Dutra (2010) pondera que o modelo de formação vigente se encontra obsoleto frente às atuais demandas. Portanto, é necessário reformular as configurações curriculares, promovendo uma formação mais capaz de lidar com os desafios da realidade educacional contemporânea.

Como resposta a tal situação o Conselho Nacional de Educação, juntamente com o Ministério de Educação, publicou em 2002 as Resoluções CNE/CP 1/2002 e CNE/CP 2/2002, as quais norteiam a carga horária, os princípios, os fundamentos e os procedimentos a serem observados na organização institucional e curricular dos cursos de licenciatura. Essas resoluções levam-nos a refletir e a questionar aspectos específicos da educação brasileira, em particular as interpretações e as implementações da prática como componente curricular.

Dessa maneira, o papel central desta pesquisa foi tentar responder o seguinte questionamento: como foram incorporadas e como estão sendo desenvolvidas as horas de prática como componente curricular nos projetos pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática a partir da Resolução CNE/CP 2, de 19 de fevereiro de 2002?

Com a finalidade de encontrar uma resposta para essa questão foi definido o seguinte objetivo geral: analisar como as práticas entendidas como

componentes curriculares (PCC) estão distribuídas nas estruturas curriculares dos projetos pedagógicos; analisar também como elas vem sendo desenvolvidas nas disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática que obtiveram conceito cinco (nota máxima) ou quatro no Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) em 2008.

Assim, para atingir nosso objetivo geral elencamos três objetivos específicos: 1) identificar as disciplinas nas quais as práticas estão inseridas como componentes curriculares nos respectivos projetos pedagógicos; 2) identificar possíveis casos nos quais as práticas estão inseridas como componentes curriculares; 3) buscar entender como as práticas entendidas como componentes curriculares estão articuladas entre as disciplinas de formação específica e pedagógica.

Para tanto, o referencial teórico foi baseado na normatização e na conceitualização da prática como componente curricular (PEREIRA, 2011).

Os documentos oficiais decorrentes de políticas educacionais (que visam a orientar o processo de ensino-aprendizagem e a formação de professores) geralmente apresentam propostas de inovação, as quais podem incitar transformações nas diversas áreas de conhecimento. Uma das questões que se apresenta com nova "roupagem" no documento orientador dos cursos de formação de professores da educação básica em nível superior (nos cursos de licenciatura), por exemplo, é a prática como componente curricular.

Mas o que vem a ser prática como componente curricular (PCC)?

Essa expressão, segundo Pereira (2011), surgiu, de maneira explícita, na Resolução CNE/CP 2/2002, a qual institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura (de graduação plena) de formação de professores da educação básica em nível superior, a saber:

> Art. 1º. A carga horária dos cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, será efetivada mediante a integralização de, no mínimo, 2800 (duas mil e oitocentas) horas, nas quais a articulação teoria-prática garanta, nos termos dos seus projetos pedagógicos, as seguintes dimensões dos componentes comuns:

> I - 400 (quatrocentas) horas de **prática como componente curricular**, vivenciadas ao longo do curso;
> II - 400 (quatrocentas) horas de estágio curricular supervisionado a partir do início da segunda metade do curso;
> III - 1800 (mil e oitocentas) horas de aulas para os conteúdos curriculares de natureza científico-cultural;
> IV - 200 (duzentas) horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais. (BRASIL, Resolução CNE/CP 2, 2002, p. 1, grifos nossos)

O referido questionamento pode ser esclarecido conforme as Resoluções CNE/CP1/2002 e CNE/CP2/2002, nas quais a definição de "prática como componente curricular" já está explicitamente dada, ou seja, como componente, ela é parte do currículo: não pode ser ignorada.

O parecer CNE/CP 28/2001 define a PCC da seguinte forma:

> [...] uma prática que produz algo no âmbito do ensino. Sendo a prática um trabalho consciente [...], ela terá que ser uma atividade tão flexível quanto outros pontos de apoio do processo formativo, a fim de dar conta dos múltiplos modos de ser da atividade acadêmico-científica. Assim, ela deve ser planejada quando da elaboração do projeto pedagógico e seu acontecer deve se dar desde o início da duração do processo formativo e se estender ao longo de todo o seu processo. Em articulação intrínseca com o estágio supervisionado e com as atividades de trabalho acadêmico, ela concorre conjuntamente para a formação da identidade do professor como educador. (BRASIL, Parecer CNE/CP 28/2001, p. 9)

Quanto ao seu conceito prático, o parecer CNE 15/2005 define, claramente, o que é a PCC, bem como qual seu intuito na formação dos professores para a educação básica:

> [...] **prática como componente curricular** é o conjunto de atividades formativas que proporcionam experiências de aplicação de conhecimentos ou de desenvolvimento de procedimentos próprios ao exercício da docência. Por meio destas atividades, são colocadas em uso, no âmbito do ensino, os conhecimentos, as competências e as habilidades adquiridas nas diversas atividades formativas que compõem o currículo do curso. As atividades caracterizadas como prática como componente curricular podem ser desenvolvidas como núcleo ou como parte de disciplinas ou de outras atividades formativas. Isto inclui as disciplinas de caráter prático relacionadas à formação pedagógica, mas não aquelas relacionadas aos

> fundamentos técnico-científicos correspondentes a uma determinada área do conhecimento. (BRASIL, Parecer 15/2005, p. 3, grifos nossos)

No entanto, é necessário entendermos exatamente o que se caracteriza uma prática como PCC, pois a mesma não se restringe apenas à discussão entre a teoria e a prática, visando à formação do professor, ela está inserida em um processo mais amplo, no qual o professor, além de saber e de saber fazer, deve compreender o que faz.

Pereira (2011) evidenciou que algo parecia estar claro na cabeça dos legisladores: a "prática como componente curricular" é diferente da "prática de ensino" e do "estágio supervisionado".

Nesse sentido, o Parecer CNE/CP nº 28/2001 enuncia:

> Assim, há que se distinguir, de um lado, a **prática como componente curricular** e, de outro, a **prática de ensino** e o **estágio** obrigatório definidos em lei. A primeira é mais abrangente: contempla os dispositivos legais e vai além deles. A prática como componente curricular é, pois, uma prática que produz algo no âmbito do ensino [...]. É fundamental que haja tempo e espaço para a prática, como componente curricular, desde o início do curso [...]. (BRASIL, Parecer CNE/CP 28/2001, p. 9, grifos nossos)

O Art. 13, § 1º, da Resolução CNE/CP 1/2002, também enfatiza que a prática transcenderá o estágio supervisionado em tempo e espaço curricular, tendo ainda como finalidade promover a articulação das diversas práticas, numa perspectiva interdisciplinar.

Quanto aos aspectos de organização curricular, Saviani (2003) aponta que essa temática tem sido amplamente estudada no contexto educacional brasileiro. O autor considera que o assunto deve estar sempre em discussão, o que implica também que ele jamais deve ser considerado esgotado e plenamente debatido.

Matos e Paiva (2009) explicitam que pensar na organização curricular implica pensar as relações de poder constituídas no âmbito do processo de formação (na instituição formadora ou na escola), situando assim se as possibilidades de disciplinas ou propostas integradas dão conta das finalidades educacionais.

Saviani (1995) assevera que pensar na organização curricular consiste em pensar no conjunto de atividades desenvolvidas pela escola e na distribuição das disciplinas/áreas de estudo – por série, grau, nível, modalidade de ensino e respectiva “grade curricular” ou estrutura curricular. Ainda, segundo a autora, pensar sobre a organização curricular compreende também pensar nos programas que dispõem os conteúdos básicos de cada componente e nas indicações metodológicas para o seu desenvolvimento.

Dessa forma, amparados por esse fio condutor, a organização curricular supõe a organização do trabalho pedagógico, a partir da qual o saber escolar encontra-se organizado e maduro para fins de aprendizagem.

Mais especificadamente, sobre a “organização do currículo segundo a estrutura das matérias de ensino”, Saviani (2003) descreve contribuições no âmbito dos aspectos lógicos envolvidos na organização do conteúdo, com enfoque sobre as questões relativas às considerações da estrutura das disciplinas escolares. No entanto, queremos aqui enfocar no que a autora explicita em relação às matérias de ensino como componente curricular.

Segundo Saviani (2003), as disciplinas escolares têm suas particularidades que caracterizam os processos de elaboração da organização curricular, quais sejam:

> 1 - a ideia de organização, sequenciação, dosagem de conteúdos segundo prioridades estabelecidas e de acordo com as exigências do processo educativo; 2 - sua presença no currículo com seu programa pressupõem uma seleção realizada no seio da cultura, constituindo numa “reinvenção cultural”; 3 - sua constituição, consolidação, alteração, desaparecimento / ressurgimento resultam de conflitos que supõe soluções negociadas; 4 - seu valor no currículo obedece a determinados padrões, às vezes ditados mundialmente (SAVIANI, 2003, p. 37).

Com base nesse fragmento é possível dizer que as disciplinas escolares podem e devem ser estudadas nas suas particularidades. Seguindo esse raciocínio, a autora esclarece que, no uso corrente, o termo “disciplina escolar” (exceto quando nos referimos às condutas de convivência e a mecanismos punitivos para a manutenção de ordem) tem sido associado à ideia de “matéria” ou de “conteúdo de ensino”, sendo visto, portanto, como componente curricular.

Adotamos, para tanto, a abordagem qualitativa de pesquisa, utilizamos como instrumentos para coleta de dados análises documentais e entrevistas. Utilizamos como ferramenta analítica a Análise Textual Discursiva (ATD), conforme Moraes e Galiazzi (2011).

Moraes (2003, p.191) afirma que "as pesquisas qualitativas cada vez mais tem se utilizado de análises textuais", haja visto que buscam o aprofundamento e a compreensão dos fenômenos.

A ATD, segundo Moraes e Galiazzi (2011, p. 12), consiste em um:

> [...] processo auto-organizado de construção de compreensão em que novos entendimentos emergem de uma sequência recursiva de três componentes: desconstrução dos textos do *"corpus"*- a unitarização; estabelecimento de relações entre os elementos unitários - a categorização; e por último o captar de um novo emergente em que a nova compreensão é comunicada e validada.

Podemos afirmar, além disso, com base nos estudos dos autores, que a ATD é:

> [...] um processo integrado de análise e de síntese que se propõe a fazer uma leitura rigorosa e aprofundada de conjuntos de materiais textuais, com o objetivo de descrevê-los e interpretá-los no sentido de atingir uma compreensão mais complexa dos fenômenos e dos discursos a partir dos quais foram produzidos. (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 114).

Os sujeitos de nossa pesquisa foram professoras de matemática do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP/Presidente Prudente.

Para processar os dados estabelecemos relações entre as unidades de análise, de maneira a combinar e classificar com o propósito de constituir categorias. A partir daí, foi possível nomeá-las segundo os critérios de Moraes e Galiazzi (2011) – lembrando que essa explicitação dá-se pelo retorno cíclico aos mesmos elementos, no sentido da construção gradativa do significado de cada categoria.

Assim posto, na reescrita de cada unidade elas foram se constituindo de um significado mais completo. Ou seja, conseguimos atribuir um nome para cada unidade produzida, visto que emergiram de forma explícita nos fragmentos. Desse modo, de acordo com a análise textual discursiva, foram

delimitadas e nomeadas as seguintes categorias: Prática como Componente Curricular e Planejamento e Disciplinas.

Os resultados revelaram que a instituição em pauta alocou as 400 horas de prática como componente curricular (PCC) no bojo das disciplinas de conteúdos específicos e pedagógicos. Observamos que a instituição trabalha com as disciplinas pedagógicas em estreita vinculação com os conteúdos que serão ensinados pelos futuros professores, com o contexto específico da matemática e ainda com a figura do professor articulador. Sendo assim, identificamos e explicitamos uma proposta diferenciada de metodologia para a implementação das 400 horas de práticas como componentes curriculares via projetos interdisciplinares.

Foi possível identificarmos também a tentativa de encontrar saídas para uma formação docente que contemple a PCC com ênfase nos procedimentos de observação e reflexão, trabalhando de forma consciente com atividades flexíveis como pontos de apoio ao processo formativo, concorrendo sempre para a formação da identidade do professor como educador.

Constatamos também a vontade de mudança na formação do futuro docente. No trabalho coletivo ficou evidente a interação e a comunicação entre os professores fizeram grande diferença no sucesso da instituição. Observamos uma equipe que discute e planeja, características fundamentais para o enfrentamento de novos desafios.

Portanto, foi possível verificar a importância da integração entre os professores no processo de planejamento e de construção do projeto pedagógico do curso, visando à inserção das horas de práticas como componente curricular.

C) SIEBRA (2012)

Ainda em 2012, a acadêmica Isis França Gonçalves Siebra defendeu a dissertação "Um olhar sobre as tendências metodológicas em educação matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática".

A referida pesquisa teve como objetivo investigar a presença das tendências metodológicas em educação matemática nos cursos de Licenciatura em

Matemática. Desse modo, a temática central da proposta investigativa situa-se na intersecção de duas linhas de pesquisa que estão em evidência no campo do conhecimento da educação matemática nas últimas décadas: a formação de professores e os estudos curriculares, pois ambas enfocam o currículo prescrito dos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil.

A pesquisa buscou responder a seguinte questão: como as tendências metodológicas em educação matemática foram incorporadas e vêm sendo trabalhadas nos cursos de formação inicial de professores de matemática?

Definimos como objetivo geral da pesquisa investigar a presença das tendências metodológicas em educação matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática. Para atingir tal objetivo foram determinados dois pontos específicos, a saber: 1) identificar as disciplinas com foco na educação matemática presentes nos currículos prescritos dos cursos em Licenciatura em Matemática; e 2) analisar como as tendências metodológicas em educação matemática estão sendo desenvolvidas nos cursos de Licenciatura em Matemática, segundo o depoimento de professores.

Assumimos, como referencial teórico, os resultados das pesquisas de autores que tratam da formação inicial de professores de matemática, tais como: Pires (2000; 2002; 2008), Fiorentini (1989; 1994; 1995; 2005), Gatti e Barreto (2009), Gatti e Nunes (2009) e Gatti, Nunes e André (2011). Para discorrer sobre educação matemática e suas tendências metodológicas, compendiamos publicações de educadores matemáticos tanto do cenário nacional quanto internacional.

Este trabalho caracterizou-se por uma abordagem qualitativa. Discutimos os dados que emergiram, num primeiro momento, da análise documental de vinte e dois projetos pedagógicos. No momento seguinte, foram utilizadas transcrições de entrevistas realizadas com professores de duas universidades brasileiras, UNESP/Rio Claro e FECILCAM/Campo Mourão - PR.

Para a análise das transcrições, foi utilizada a análise textual discursiva. A partir das análises das entrevistas semiestruturadas realizadas com os professores das referidas instituições, foram delimitadas e nomeadas as seguintes categorias: Formação Inicial de Professores de Matemática e Tendências

Metodológicas em Educação Matemática. A categoria Formação Inicial de Professores de Matemática foi composta por duas subcategorias: Reestruturação dos Projetos Pedagógicos e Disciplinas e a postura do professor formador. As subcategorias apontadas na categoria Tendências Metodológicas em Educação Matemática foram: Concepção de Educação Matemática do professor formador e Trabalhando com as Tendências Metodológicas em Educação Matemática na formação inicial do futuro professor de Matemática.

Com base na pesquisa, constatamos que a incorporação dessas disciplinas deu-se a partir das Resoluções CNE/CP 1/2002 e CNE/CP 2/2002, que foram responsáveis pela reestruturação dos projetos pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática. Verificamos que as tendências metodológicas em educação matemática foram incorporadas na estrutura curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática em diferentes disciplinas, inclusive em disciplinas específicas de conteúdo matemático, o que abre espaço para discussões na área da educação matemática e, consequentemente, proporciona ao futuro professor novas possibilidades de trabalhar a matemática.

Na segunda categoria, observamos o quanto foi difícil para os professores formadores elaborarem uma definição para *educação matemática*, levando-nos a conclusão de que não existe uma única definição, mas sim várias que se complementam, umas mais voltadas para o campo profissional, com características mais práticas e outras mais relacionadas com o campo científico ou epistemológico. É nesse movimento contínuo de reflexão-na-ação que a educação matemática vai se constituindo (BICUDO; GARNICA, 2003).

Com esta pesquisa, pretendemos evidenciar alguns momentos e movimentos da educação matemática nos dois cursos de Licenciatura em Matemática com que trabalhamos, enfatizando a incorporação das tendências metodológicas em educação matemática presentes nos cursos de Licenciatura em Matemática. Nos animamos em afirmar que, aos poucos, a educação matemática, tanto como campo profissional quanto como campo científico, vem conquistando espaços mais amplos, ainda que de maneira tímida.

D) SOUZA (2013)

Apesar de termos delimitado anteriormente o período de 2011 a 2012 para descrição de pesquisas, decidimos incluir esta dissertação, pois foi defendida no início de 2013 somente devido a problemas de disponibilidade dos membros da banca.

A acadêmica Juliana Alves de Souza defendeu sua dissertação "Equações e expressões algébricas para o ensino fundamental: um olhar sobre alguns cursos de Licenciatura em Matemática", cujo objetivo foi investigar o tratamento dado por alguns cursos de Licenciatura em Matemática aos conteúdos *equações e expressões algébricas,* tendo em vista as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCNEF), além da prática profissional do futuro professor de matemática nos anos finais do ensino fundamental. Em outros termos, buscamos analisar se há vínculos entre o tratamento dado a esses conteúdos matemáticos na formação inicial do professor, com base nos Pcnef, e sua atuação docente na escola básica.

Essa investigação iniciou-se com a análise dos programas de ensino das disciplinas nos projetos pedagógicos (PP's) de vinte e dois cursos de Licenciatura em Matemática do Brasil, os quais fazem parte do conjunto de cursos que obtiveram conceito quatro ou cinco no ENADE de 2008. A partir da identificação das disciplinas que continham as equações e expressões em suas ementas, afunilamos nossa amostra em três cursos de formação de professores e quatro disciplinas específicas a serem investigadas.

Tendo como base as orientações curriculares dos PCNEF (1998a, 1998b), após a análise dos PP's aplicamos um questionário aos professores formadores que ministraram tais disciplinas no ano de 2011, tendo como foco o tratamento dado a esses conteúdos da álgebra escolar no processo de formação dos licenciandos, bem como a utilização do livro didático, recurso sempre presente na prática do professor do ensino básico.

Dentre os aportes teóricos que embasam o estudo utilizamos as concepções de Usiskin (1995a) ao ensino da álgebra escolar, as quais possuem estreitas relações com as propostas dos PCNEF.

Com base em questões que permeiam a formação inicial de professores, relativas aos papéis da matemática acadêmica e da matemática escolar, buscamos analisar como se dá a visão dos formadores sobre tais campos de conhecimento matemático, com base na formulação dos autores Yves Chevallard e Moreira e David.

Realizamos uma análise qualitativa sobre os dados, à luz das técnicas metodológicas da Análise de Conteúdo de Bardin (2009) e Franco (2008).

A partir dessa metodologia definimos duas categorias: Álgebra Escolar e Visão de Matemática dos Professores Formadores. A categoria Álgebra Escolar foi composta por três subcategorias: Equações e Expressões Algébricas, Parâmetros Curriculares Nacionais e Livro Didático. As subcategorias elencadas na categoria Visão de Matemática dos Professores Formadores foram: Matemática Escolar como Transposição Didática da Matemática Acadêmica, Matemática Escolar como uma Construção sob Múltiplos Condicionantes e Unicidade da Matemática Acadêmica.

As análises indicaram que nem todos os professores realizam o trabalho voltado à didática dos conteúdos, no entanto, dentre os quatro formadores pesquisados, apenas um deles externaliza esse fato. Neste caso, foi observado que a prática desse professor possivelmente está relacionada com sua visão sobre o que vem a ser matemática e a atividade matemática. Três deles indicaram atentar-se às orientações dos PCNEF na respectiva disciplina ministrada. Contudo, não foi possível perceber como o trabalho é desenvolvido. Apenas dois deles realizam análise de livros didáticos em suas aulas.

Podemos concluir que três dos quatro professores pesquisados trazem à tona indícios que sinalizam a possibilidade do desenvolvimento de uma formação que possa contribuir com a futura prática docente dos licenciandos em relação aos conceitos matemáticos em estudo: equações e expressões algébricas, à exceção de um deles, que pontua que a didática e o ensino não são finalidades da disciplina que ministra.

As concepções mais utilizadas pelos professores, de acordo com o que foi exposto nos PCNEF (1998b), são: a *Álgebra como Equações e Funcional*, explorando a letra como incógnita e variável, as quais correspondem, segundo as

concepções expostas por Usiskin (1995a), à *Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas* e à *Álgebra como estudo de relações entre grandezas*, nas quais a letra assume papel, respectivamente, de incógnitas ou constantes e de argumento ou parâmetro.

Esperamos que o estudo realizado propicie tanto reflexão quanto discussão em torno da formação inicial de professores de matemática e do papel destinado à matemática escolar nos cursos de licenciatura, já que a principal finalidade desses cursos é formar professores para atuar na educação básica.

Trabalhos apresentados e publicados em eventos

Os membros do grupo de pesquisa FORMEM apresentaram e publicaram trabalhos em diversos eventos, conforme apresentado nas Tabelas 1 e 2 a seguir.

Tabela 1 – Congressos onde foram apresentados trabalhos pelos membros do grupo FORMEM no ano de 2011

<table>
<tr><th colspan="2">2011</th></tr>
<tr><td>XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM)
Recife – PE</td><td>Os conhecimentos de um grupo de professores envolvendo decimais
Adriana Fátima de Souza Miola e Patrícia Sandalo Pereira</td></tr>
<tr><td>V Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática (V SESEMAT)
Campo Grande – MS</td><td>Trabalho cooperativo: uma experiência envolvendo o ensino de números decimais
Adriana Fátima de Souza Miola e Patrícia Sandalo Pereira</td></tr>
<tr><td rowspan="2">XV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (XV EBRAPEM)
Campina Grande - PB</td><td>A Prática como Componente Curricular nos cursos de Licenciatura em Matemática
Kely Fabricia Pereira Nogueira e Patrícia Sandalo Pereira</td></tr>
<tr><td>As propostas de formação algébrica presentes nas disciplinas pedagógicas dos currículos prescritos de alguns cursos de Licenciatura em Matemática do Brasil e sua relação com a álgebra elementar da Educação Básica
Juliana Alves de Souza e Patrícia Sandalo Pereira</td></tr>
</table>

Fonte: a autora

Tabela 2 – Congressos onde foram apresentados trabalhos pelos membros do grupo FORMEM no ano de 2012

2012	
VI Seminário Sul-mato-grossense de Pesquisa em Educação Matemática (VI SESMAT) Campo Grande - MS	*Prática como Componente Curricular: o que é isso?* Kely Fabricia Pereira Nogueira e Patrícia Sandalo Pereira
	Licenciaturas em Matemática e as disciplinas envolvendo Tendências em Educação Matemática Isis França Gonçalves Siebra e Patrícia Sandalo Pereira
	Equações e Expressões Algébricas para o Ensino Fundamental: as propostas de formação de alguns cursos de Licenciatura em Matemática Juliana Alves de Souza e Patrícia Sandalo Pereira
XI Encontro de Pesquisa em Educação da Anped Centro-Oeste Corumbá - MS	*Breve análise da Prática como Componente Curricular nos projetos pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática* Kely Fabricia Pereira Nogueira e Patrícia Sandalo Pereira
XI Encontro Sul-Mato-Grossense de Educação Matemática (XI ESEM) Nova Andradina - MS	*Formação de Professores de Matemática: panorama da produção acadêmica no Centro-Oeste (2005-2010)* Rogers Barros de Paula e Patrícia Sandalo Pereira
V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (V SIPEM) Petrópolis - RJ	*Prática como Componente Curricular: uma proposta para a licenciatura em Matemática* Kely Fabricia Pereira Nogueira e Patrícia Sandalo Pereira
XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (XVI EBRAPEM) Canoas - RS	*Tendências em Educação Matemática em alguns cursos de Licenciatura em Matemática* Isis França Gonçalves Siebra e Patrícia Sandalo Pereira
	Um panorama das pesquisas sobre as Práticas de Estágio Supervisionado de Matemática nas regiões Norte, Nordeste e Centro-Oeste do Brasil Edinalva da Cruz Teixeira Sakai e Patrícia Sandalo Pereira
	Formação Inicial de Professores de Matemática: mapeando as pesquisas produzidas na região Centro-Oeste do Brasil, a partir de 2005 Rogers Barros de Paula e Patrícia Sandalo Pereira
XVI Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino (XVI ENDIPE) Campinas – SP.	A prática como componente curricular via projetos: uma alternativa para a formação de professores Kely Fabricia Pereira Nogueira e Patrícia Sandalo Pereira
	Pesquisas sobre estágio supervisionado em matemática: a produção nas regiões Norte, Nordeste e Centro-Oeste Patricia Sândalo Pereira, Marisol Vieira Melo e Edinalva da Cruz Teixeira Sakai

Fonte: a autora

Podemos observar na tabela anterior que os membros do grupo FORMEM participaram de eventos internacionais, nacionais e regionais, sempre com temáticas ligadas a formação de professores e vinculados aos estudos do grupo e das dissertações que estavam em desenvolvimento.

Em 2012, os membros do grupo FORMEM apresentaram trabalhos em eventos internacionais, nacionais e regionais. O número de trabalhos aumentou devido à inclusão de mais dois membros no grupo que estão desenvolvendo pesquisas ligadas as suas dissertações de mestrado.

Projetos de Pesquisas Financiados

A) "Estado da arte das pesquisas em Educação Matemática que tratam da Formação de Professores produzidas nos Programas de Pós-Graduação das regiões Norte, Nordeste e Centro-Oeste no Brasil, a partir de 2005"

Em 2011, o grupo FORMEM teve seu primeiro projeto de pesquisa aprovado no Edital Mcti/CNPq/MEC/Capes Nº 07/2011. O que motivou a elaboração deste projeto foi a publicação, no ano de 2005, por parte do Ministério da Educação, do Plano Nacional de Pós-Graduação (PNPG), no qual se apontava uma assimetria na produção dos programas de pós-graduação das regiões Norte, Nordeste e Centro-Oeste em relação às produções das regiões Sul e Sudeste.

Este projeto tem como objetivo principal mapear as pesquisas em educação matemática voltadas para a formação de professores que estão sendo produzidas nos programas de pós-graduação nas regiões Norte, Nordeste e Centro-Oeste do Brasil.

Por meio de análise documental das dissertações e teses voltadas à formação de professores, produzidas pelos programas de pós-graduação nas regiões Norte, Nordeste e Centro-Oeste, estamos construindo o estado da arte das pesquisas em educação matemática nessa linha.

Este projeto de pesquisa envolve a participação de pesquisadores de três programas de pós-graduação brasileiros: Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEDUMAT – UFMS), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) e Programa de Pós-

Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (Uepb).

Esta pesquisa tem como meta contribuir para a implementação de novas políticas públicas e para a divulgação do estado da arte das pesquisas em educação matemática que tratam da formação de professores. Por meio da construção de um estado da arte das pesquisas voltadas à formação de professores, ofereceremos uma visão das especificidades e particularidades desses trabalhos, bem como um olhar abrangente das produções que vêm sendo desenvolvidas na formação inicial e continuada de professores de matemática das três regiões do Brasil.

Atualmente, temos duas dissertações de mestrado atreladas ao projeto, ambas vinculadas ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

B) Trabalho colaborativo com professores que ensinam Matemática na Educação Básica em escolas públicas das regiões Nordeste e Centro-Oeste

Em 2012, o grupo FORMEM submeteu uma proposta de um projeto em rede no Edital Capes nº 049/2012, no Programa Observatório da Educação. O projeto foi aprovado e será desenvolvido no período de 2013 a 2016.

O grupo tem como instituição sede a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), além de núcleos na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), em Campina Grande e na Universidade Federal de Alagoas (UFAL), em Maceió.

Além disso, este projeto tem como objetivo ampliar a produção de conhecimentos no campo educacional que possam subsidiar o desenvolvimento de ações escolares voltadas à educação matemática, buscando melhorar o ensino e a aprendizagem matemática.

No Estado de Mato Grosso do Sul, atenderá escolas do ensino fundamental e médio nas cidades de Campo Grande e de Corumbá. O projeto contará com a participação de quatro estudantes de graduação, sete professores e/ou coordenadores da educação básica e quatro estudantes de pós-graduação, de modo a constituir um grupo colaborativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O grupo de pesquisa FORMEM, apesar de ter sido constituído há pouco tempo, tem produzido vários trabalhos, como pudemos observar ao longo do texto.

Os aportes teóricos têm permeado diversas temáticas da formação de professores, envolvendo desde a formação inicial até a formação continuada. Quanto ao referencial metodológico, temos utilizado a Análise de Conteúdo e a Análise Textual Discursiva.

Ressaltamos a importância dos projetos de pesquisa serem financiados pelo CNPq e pela Capes, principalmente o projeto de pesquisa ligado ao Programa Observatório da Educação, da Capes, que permitirá trabalhar com os futuros professores, com professores da educação básica e com acadêmicos da pós-graduação.

Esperamos que o grupo de pesquisa FORMEM possibilite, por meio desses projetos, a inclusão de novos integrantes, fazendo com que se fortaleça e produza cada vez mais pesquisas ligadas à formação de professores de matemática.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. 5. ed. Tradução Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 2009.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CP n. 28**, de 2 de outubro de 2001.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação/Conselho de Ensino Superior. Parecer de esclarecimento das resoluções CNE/CP 01/2002 e CNE/CP 02/2002. **Parecer CNE/CES 15/2005.** Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/pces0015_05.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2011.

BRASIL. **Resolução CNE/CP 1**, de 18 de fevereiro de 2002. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica,

em nível superior, curso de Licenciatura, de graduação plena. Diário Oficial da União, Brasília, 9 abr. 2002c. Seção 1, p.31. Republicada por ter saído com incorreção do original no Diário Oficial da União de 4 de mar. 2002. Seção 1, p. 8.

BRASIL. **Resolução CNE/CP 2**, de 19 de fevereiro de 2002. Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior. Diário Oficial da União, Brasília, 4 mar. 2002d. Seção 1, p. 9.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília – DF: MEC/SEF, 1998a.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática. Brasília – DF: MEC/SEF, 1998b.

CHEVALLARD, Y.; BOSH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

FIORENTINI, D. Tendências Temáticas e Metodológicas da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. IN: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, I, 1989, Campinas. **Anais...**

FIORENTINI, D. A Educação Matemática enquanto Campo Profissional de Produção de Saber: a trajetória brasileira. **Dynamis**, Blumenau, v. 1, n. 7, p. 7-17, abr./jun. 1994.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, ano 3, n. 4, p. 1-37, nov. 1995.

FIORENTINI, D. A Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática. **Revista de Educação PUC – Campinas**, Campinas, n. 18, p. 107-115, jun. 2005.

FRANCO, M. L. P. B.. **Análise do Conteúdo**. 3. ed. Brasília: Série Pesquisa v. 6, 2008.

GATTI, B. A; NUNES, M. M. R. **Formação de professores para o ensino fundamental:** estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas. São Paulo: FCC/DPE, 2009.

GATTI, B. A; BARRETO, E. S. de S.; ANDRÉ, M. E. D. de A. **Políticas docentes no Brasil: um estado da arte.** Brasília: UNESCO, 2011. 300 p.

GATTI, B. A; NUNES, M. M. R. **Formação de professores para o ensino fundamental:** estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas. São Paulo: FCC/DPE, 2009.

MATOS, M. C.; PAIVA, E. V. de. **Currículo Integrado e Formação Docente:** Entre Diferentes Concepções e Práticas. Disponível em: <http://www.ufsj.edu.br/portalrepositorio/File/Vertentes/Maria do Carmo Edil.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2012.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Editora UNIJUÍ, 2011.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

PEREIRA, J. E. D. A prática como componente curricular na formação de professores. **Santa Maria,** v. 36, n. 2, p. 203-218, maio/ago. 2011. Disponível em: <http://cascavel.ufsm.br/revistas/ojs-.2.2/index.php/reveducacao/article/viewFile/3184/2047>. Acesso em: 27 nov. 2011.

PIRES, C. M. C. Novos desafios para os cursos de licenciatura em matemática. **Educação Matemática em Revista,** ano 7, n. 8, jun. 2000.

PIRES, C. M. C. Reflexões sobre os cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referencia as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores de Educação Básica. **Educação Matemática em Revista,** ano 9, n. 11ª, abr. 2002.

PIRES, C. M. C. Educação Matemática e sua Influência no Processo de organização e Desenvolvimento Curricular no Brasil. **Bolema**, Rio Claro, ano 21, n. 29, p. 13-42, 2008.

SAVIANI, N. A conversão do conhecimento científico em saber escolar: uma luta inglória? **Revista do SINPEEM**, São Paulo, n. 2, p. 27-32, 1995.

SAVIANI, Nereide. **Saber Escolar, Currículo e Didática:** problemas da unidade conteúdo/método no processo pedagógico. 4. ed. Campinas: Autores associados, 2003.

SHULMAN, Lee. **Those Who Understand:** Knowledge Growth in Teaching. Educational Researcher. Washington, v. 15, n. 2, Feb. 1986.

__________. **Knowledge and teaching:** foundations of the new reform. Harvard Educational Review. v. 57, n. 1 Feb. 1987.

__________; WILSON, S. M.; RICHERT, A. E. **150 different ways of knowing: representations of knowledge in teaching.** Exploring Teachers' Thinking, 1987.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **As ideias da álgebra**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995a. p. 9-22.

CAPÍTULO 03

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: EM FOCO O JOGO NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM

Andréa Damasceno Raupp
Neiva Ignês Grando

INTRODUÇÃO

O jogo tem feito parte das propostas pedagógicas da educação matemática. Ao mesmo tempo tem sido objeto de estudo em pesquisas da área. Enquanto uma tendência da educação brasileira, o jogo tem sido pensado como uma tentativa de qualificação do ensino, a partir da década de 1920, por meio do movimento da *escola nova* (FIORENTINI, 1995, p. 8). No entanto, na contemporaneidade, podemos nos perguntar se o jogo ainda é uma tendência ou se já é parte intrínseca das metodologias de ensino e de aprendizagem da matemática.

Atualmente, são várias as teorias e os caminhos que um professor de matemática pode utilizar em seu planejamento. Constitui-se um desafio, nos diferentes níveis de ensino, a utilização dessas contribuições como elementos que possam viabilizar a elaboração e o desenvolvimento de propostas que possibilitem a aprendizagem e o desenvolvimento dos envolvidos no processo.

Nesse sentido, o texto deste capítulo foi construído com base numa pesquisa de abordagem qualitativa, voltada à análise de situações de jogo em sala de aula, envolvendo estudantes de 4ª a 6ª série do ensino fundamental de uma escola da rede privada de ensino de Passo Fundo/RS. Os alunos tinham idades entre 9 e 12 anos. O material de análise foi composto por gravações em vídeo de aulas de matemática por meio da técnica da autoscopia, que

"consiste em realizar uma vídeo-gravação do sujeito, individualmente ou em grupo e, posteriormente, submetê-lo à observação do conteúdo filmado para que exprima comentários sobre ele" (SADALLA, 1997, p. 33). Foram organizados episódios[1] a partir dos quais se procedeu à observação dos diálogos, do comportamento e das atitudes dos envolvidos – informações valiosas para a análise das interações e dos processos desencadeados durante as situações de jogos. Para Góes (2000, p. 9), este tipo de abordagem metodológica de análise, caracterizada como *microgenética*, trata "de uma forma de construção de dados que requer a atenção a detalhes e o recorte de episódios interativos, sendo o exame orientado para o funcionamento dos sujeitos focais, as relações intersubjetivas e as condições sociais da situação".

Em cada jogo, constituído como um episódio, foram selecionadas uma ou mais sequências, tendo como critério a interação entre os estudantes e a interação destes com a professora, quando fosse possível identificar situações de aprendizado e desenvolvimento.

Na primeira parte deste capítulo apresentamos alguns elementos históricos e teóricos sobre brincadeira, brinquedo e jogo, como introdução ao jogo na educação matemática. Na sequência traremos a análise de um jogo desenvolvido numa turma de 6ª série na forma de episódio e suas respectivas sequências de diálogos.

JOGO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A história da civilização vem sendo contada por meio dos mais variados registros deixados por nossos antepassados. Desde pinturas em rochas, que sobreviveram aos milênios, às mais recentes pinturas registradas em telas; além de músicas, livros, cartas e das histórias contadas por pais e avós sobre como era a vida em tempos passados. São hábitos e costumes que constituem uma cultura; enfim, são saberes de uma época que vão sendo perpetuados durante gerações. A cultura é resultado das mais diversas atividades, uma das quais é a *atividade lúdica*, inerente ao ser humano (GRANDO, 2004, p. 8).

[1] Um episódio de ensino se constitui num "conjunto de atividades e discussões que tem por objetivo a aprendizagem de um determinado conceito ou aspecto importante do conceito por parte significativa dos alunos." (CARVALHO *apud* MORTIMER, 2000, p. 265).

A palavra *lúdico* deriva do latim *ludus*[2]. É comum associá-la a uma atividade da infância, tempo no qual reinam (ou deveriam reinar) a alegria, a brincadeira, o jogo, a fantasia e o divertimento. Todavia, o lúdico não é algo que pertença apenas a uma única fase da existência. A ideia de *ludus* "abrange os jogos infantis, a recreação, as competições, as representações litúrgicas e teatrais e os jogos de azar" (HUIZINGA, 1990, p. 41). Para Grando, o exercício de "atividades lúdicas representa uma necessidade para as pessoas em qualquer momento de suas vidas" (2004, p. 8). Entende-se por *atividade lúdica* aquela cujo fim seja o prazer que a própria atividade oferece: ouvir uma música que agrade, cantar, dançar ou desenhar – enfim, algo que dê certo prazer e alegria. À guisa de ilustração, podemos observar o registro de algumas atividades lúdicas do século XVI na tela de Pieter Brueghel, pintada em 1560.

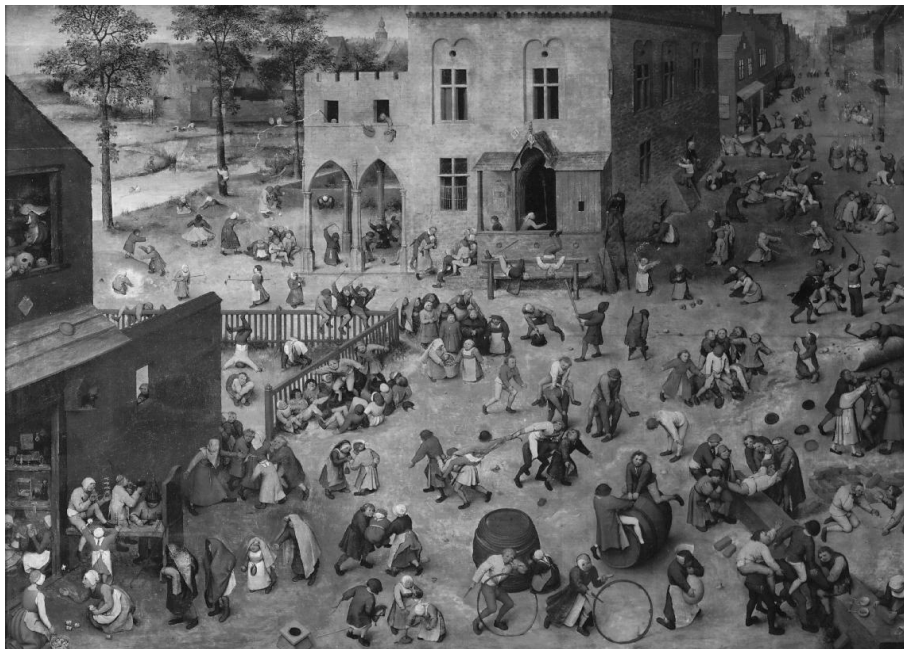
Na obra[3], é possível encontrar 84 atividades lúdicas das crianças flamengas: em geral, são jogos e brincadeiras, como virar cambalhota, brincar de pular sela, subir em árvore, jogar par ou ímpar, andar sobre pernas-de-pau, "o chefe mandou" etc. Durante muitos anos essas atividades fizeram – e para muitos ainda fazem – parte do contexto social, de modo que elas foram se espalhando mundo afora, algumas sofrendo variações ao longo do tempo. Tais atividades nos fazem pensar que jogos e brincadeiras são algo alegre, divertido e prazeroso. São registros como o desta tela (datada de mais de quatrocentos anos atrás) que ilustram o que foi referido anteriormente, sobre o fato de a cultura lúdica fazer parte da vida dos homens. Segundo Huizinga (1990, p. 53), é por meio do jogo "que a sociedade exprime sua interpretação da vida e do mundo", ideia que enfatiza ainda mais a ubiquidade do caráter lúdico na cultura.

A ludicidade permite a criação de brincadeiras, brinquedos e jogos que auxiliam no desenvolvimento de algumas funções essenciais para o crescimento humano, como a linguagem, a memória, a percepção, a atenção, a motricidade e a formação de relações sociais. Para uma maior aproximação com o conceito e as características da brincadeira, do brinquedo e do jogo, sugerimos autores

---

[2] Segundo Huizinga, o termo *ludus*, como equivalente a *jogo*, em geral "foi suplantado por um derivado de *jocus*, cujo sentido específico (gracejar, troçar) foi ampliado para o de jogo em geral. É o caso do francês, *jeu, jouer*, do italiano *gioco, giocare*, do espanhol *juego, jugar*, do português *jogo, jogar*". (1990, p. 41).

[3] No Anexo A encontra-se a relação de 55 das 84 brincadeiras registrada por Brueghel, segundo Friedmann. (1996, p. 84-85).

Figura 1 – Jogos infantis

Fonte: Brueghe (2013).

como Leontiev (2001), Vigotski (2005; 2007), Elkonin (1998), Friedmann (1996), Brougère (1998), dentre outros.

Para Leontiev, a brincadeira é uma atividade caracterizada por uma estrutura tal que o motivo (aquilo que estimula a atividade) está no próprio processo (2001, p. 119): não há preocupação em alcançar um determinado resultado que satisfaça alguma necessidade específica. O que estimula a criança a brincar é o próprio conteúdo da atividade. Como exemplo, podemos citar a construção de uma torre com blocos, cujo alvo "não consiste em construir uma estrutura, mas em *fazer*." (2001, p. 123, grifo do autor).

Quanto ao brinquedo, pode ser um objeto ou uma pessoa disposta a brincar. Por meio do brinquedo, podem-se obter informações relevantes sobre a criança: "suas emoções, a forma como interage com seus colegas, seu desempenho físico-motor, seu nível linguístico, sua formação moral". (FRIEDMANN, 1996, p. 14).

Vigotski (2007) analisa o papel do brinquedo no desenvolvimento infantil, mas o faz referindo-se "especificamente à brincadeira de 'faz-de-conta', como brincar de casinha, de escolinha, brincar com um cabo de vassoura como se fosse um cavalo". (OLIVEIRA, 1999, p. 66). O brinquedo, segundo Vigotski (2007, p. 109), é "um mundo ilusório e imaginário onde os desejos não realizáveis podem ser realizados". Algumas vezes, há referência ao brinquedo a partir do termo *jogo*, como os jogos de representação de papéis, também chamados de *teatrinhos* (ou *jogos de enredo*), nos quais a criança assume certa função social do adulto (LEONTIEV, 2001, p. 132). Ainda há outra denominação para o mesmo jogo, o chamado *jogo protagonizado*, referido por Elkonin (1998).

Para Rubinstein, existem diferentes formas de jogo que correspondem aos níveis de desenvolvimento infantil, como os jogos funcionais, desenvolvidos até os 18 meses aproximadamente; os jogos construtivos, até os três anos aproximadamente; os jogos temáticos, desenvolvidos até o final dos três anos, aproximadamente; os jogos de funções, até os cinco anos, aproximadamente. Assim, "ao participar no desenvolvimento da criança o jogo vai-se desenvolvendo também" (1977, p. 124).

Ainda assim, há divergências quanto ao que deve ser chamado de *jogo*. Como exemplo, Rubinstein chama de *jogos funcionais* as atividades motoras iniciadas no primeiro ano de vida; para Elkonin, esta denominação não é conveniente. Este autor prefere chamá-las *exercícios elementares* (1998, p. 215), pois são atividades que não apresentam uma situação fictícia.

Huizinga esclarece que o significado da palavra *jogo* apresenta variações etimológicas que tornam difícil compreender o seu conceito:

> Nas línguas europeias modernas a palavra "jogo" abrange um terreno extremamente vasto. [...], tanto nas línguas românicas como nas germânicas encontramo-la distribuída por diversos grupos de conceitos relacionados com o movimento ou com a ação, os quais nada têm a ver com o sentido estrito ou formal do termo. (HUIZINGA, 1990, p. 42).

Brougère (1998, p. 9) esclarece tal dificuldade afirmando que "a ideia que se tem de jogo varia de acordo com autores e épocas", já que "a maneira como é utilizado e as razões dessa utilização são igualmente diferentes". Contudo, o autor apresenta características que são próprias do jogo, tais como

a relação cultural que se estabelece entre os indivíduos, o pressuposto de uma aprendizagem social, a preocupação com o ambiente onde deve acontecer o jogo e a necessidade do outro durante o processo de ensino. Enfatiza-se, assim, a inevitável influência do meio.

Huizinga (1990, p. 16) resume da seguinte forma as características do jogo:

> É uma atividade que se processa dentro de certos limites temporais e espaciais, segundo uma determinada ordem e um dado número de regras livremente aceitas, e fora da esfera da necessidade ou da utilidade material. O ambiente em que ele se desenrola é de arrebatamento e entusiasmo, e torna-se sagrado ou festivo de acordo com a circunstância. A ação é acompanhada por um sentimento de exaltação e tensão, e seguida por um estado de alegria e distensão.

A aprendizagem que ocorre por meio do jogo é uma aprendizagem social, que também acontece no espaço escolar muitas vezes informalmente – nos intervalos de aula, no período do recreio, na chegada e na saída dos estudantes na escola. Nesses momentos os estudantes aprendem e ensinam, em pequenos grupos de colegas, novas brincadeiras e novos jogos, além de suas respectivas regras. Ademais, compartilham entre si informações que podem estar carregadas de conhecimento matemático e que poderiam ser aproveitadas em sala de aula, junto com o professor e a turma como um todo. (GRANDO, 2004, p. 10).

Uma das características importantes para se compreender o que é o jogo é a presença de regras. Segundo Huizinga, as regras "são um fator muito importante para o conceito de jogo. Todo jogo tem suas regras. São estas que determinam aquilo que 'vale' dentro do mundo temporário por ele circunscrito" (1990, p. 14). O imperativo de obedecer às regras deve estar acima do desejo de ganhar, a partir do qual surge o elemento de tensão, situação que confere ao jogo

> um certo valor ético, na medida em que são postas à prova as qualidades do jogador: sua força e tenacidade, sua habilidade e coragem e, igualmente, suas capacidades espirituais, sua "lealdade".[...] E não há dúvida de que a desobediência às regras implica a derrocada do mundo do jogo. (HUIZINGA, 1990, p. 14).

É durante o desenvolvimento infantil que surgem as regras – ocultas[4] ou claras –, elementos essenciais para que o jogo aconteça. Segundo Vigotski, "não existe brinquedo sem regras" (VIGOTSKI, 2007, p. 110), toda evolução do brinquedo se dá em relação às regras. No início da idade pré-escolar a criança envolve-se num jogo imaginário, que contém regras ocultas. Durante seu desenvolvimento, ela transforma os jogos anteriores em jogos com regras explícitas (VIGOTSKI, 2007, p. 112). Para Vigotski, o jogo evolui à medida que ocorrem mudanças "nas motivações, tendências e incentivos" (VIGOTSKI, 2007, p. 108). Leontiev refere-se a essa evolução como a "lei do desenvolvimento do brinquedo"[5], segundo a qual a principal mudança observada "é que os jogos de enredo com uma situação imaginária são transformados em jogos com regras nos quais a situação imaginária e o papel estão contidos em forma latente" (LEONTIEV, 2001, p. 133). Ou seja, conforme mudam as necessidades, uma nova forma de jogo se desenvolve a partir de outra. Segundo essa perspectiva, os jogos com regras claras surgem em um estágio posterior aos jogos de enredo.

Obedecer a regras explícitas é algo difícil para uma criança no início da idade pré-escolar. Por isso, nessa fase observa-se o surgimento do jogo protagonizado, no qual situações fictícias são criadas a partir do momento em que a criança assume o papel de um adulto. Segundo Elkonin, "o objeto da atividade da criança no jogo é o adulto, o que o adulto faz, com que finalidade o faz e as relações que estabelece, ao mesmo tempo, com outras pessoas" (ELKONIN, 1998, p. 204). Assim, ao imitar o comportamento do adulto, faz-se necessário cumprir os requisitos do papel assumido, conforme esclarece Elkonin (1998, p. 243):

> Surgem regras internas não escritas, mas obrigatórias para os que jogam, provenientes do papel e da situação lúdica. Quanto mais desenvolvido está o jogo, tanto maior é o número de regras internas e os aspectos lúdicos multiplicam-se e ampliam-se cada vez mais, envolvendo as inter-relações histriônicas das crianças, os sentidos atribuídos aos brinquedos e a continuidade do desenvolvimento do argumento.

[4] Regras que não foram preestabelecidas; não são regras formais. São regras de comportamento ligadas ao conceito que as crianças têm de determinado papel que exercem nos jogos de representação.

[5] Segundo Leontiev (2001), indicado pelas descobertas experimentais de Elkonin.

A partir de uma série de experimentos realizados com crianças de três a sete anos, Elkonin identificou dois estágios do desenvolvimento do jogo protagonizado. No primeiro estágio (de três a cinco anos) houve a predominância de ações referentes à lógica da ação. Vamos dar um exemplo: ao brincar de dar alimento para crianças (bonecas), além do ato de dar o alimento, existem outras prerrogativas: as bonecas devem estar sentadas, devem receber primeiro o macarrão e só depois o doce, entre outras regras. Ou seja, há a preocupação, durante o jogo, em cumprir determinada lógica que corresponde à situação real das ações praticadas. No segundo estágio (de cinco a sete anos), além das ações, o autor observou a manifestação de relações sociais correspondentes às relações reais entre as pessoas. Considerando o exemplo anterior, neste estágio surgiria a preocupação em alertar as crianças (bonecas) sobre o hábito de lavar as mãos antes de comer, a advertência da punição para quem não comer tudo etc. Dessa forma, Elkonin salienta que, “à medida que a idade aumenta, eleva-se o nível de desenvolvimento do jogo” (ELKONIN, 1998, p. 299).

Essa característica evolutiva do jogo exerce papel importante na evolução do pensamento abstrato das crianças. As regras vão, aos poucos, destacando-se. Chega até mesmo a parecer que, “quando a regra se toma por entidade convencional, isso é indício de que a criança já está preparada para ir à escola” (ELKONIN, 1998, p. 396), realizando assim a transição para um novo período evolutivo.

A partir da ideia do movimento crescente da complexidade dos jogos com regras, Moura (1991, p. 47) infere que os jogadores devam ter estruturas de pensamento capazes de dominar tal desenvolvimento. Dessa forma, quando há jogo, há regras que devem ser acordadas pelos jogadores, ou criadas por eles. Segundo Brougère, “uma regra de jogo só tem valor se for aceita pelos jogadores e só tem validade durante o jogo” (1998, p. 192), ela pode ser transformada ou não para uma próxima vez. Assim, fica evidenciado o caráter interativo do jogo, durante o qual as crianças devem participar de uma negociação com o outro para que o jogo aconteça. Explica Brougère (1998, p. 192):

> O jogo é então em espaço social, já que não é criado por natureza, mas após uma aprendizagem social e supõe uma significação conferida por vários jogadores (um acordo). [...] Esse espaço social supõe regras. Há

> a escolha e decisão continuada da criança na introdução e no desenvolvimento do jogo. Nada mantém o acordo senão o desejo de todos os parceiros.

Na escola, os jogos podem fazer parte do projeto pedagógico do professor. Para Moura, ao "optar pelo jogo como estratégia de ensino, o professor o faz com uma intenção: propiciar a aprendizagem. E ao fazer isto tem como propósito o ensino de um conteúdo ou de uma habilidade" (MOURA, 1991, p. 3).

O jogo no ambiente escolar pode ir além da aquisição e da ampliação de conhecimentos específicos. Grando (2004, p. 26) faz as seguintes inferências:

> durante o jogo observamos que, muitas vezes, as crianças (adversários) ajudam-se durante as jogadas, esclarecendo regras e, até mesmo, apontando melhores jogadas (estratégias). A competição fica minimizada. O objetivo torna-se a socialização do conhecimento do jogo. Nesse processo de socialização no jogo, a criança ouve o colega e discute, identificando diferentes perspectivas e justificando-se.

Assim, o jogo pedagógico tem seu valor reconhecido não apenas pelo aspecto cognitivo, mas também pelos aspectos afetivo e social, ambos importantes para a constituição do sujeito.

Como vimos, na literatura é possível identificar vários autores que fazem referência ao jogo. Alguns deles apresentam classificações, como Moura (1991, p. 49), que faz uma distinção entre *jogo desencadeador de aprendizagem* e *jogo de aplicação*. O primeiro exige que o estudante estabeleça "um plano de ação, com a busca de conhecimentos anteriores, através da comparação com situações semelhantes à proposta ou da síntese de conhecimentos anteriores, de modo que haja uma ruptura no conhecimento anterior"; o segundo, conforme o próprio nome sugere, requer apenas o emprego de definições e algoritmos.

Já de acordo com Borin (2007, p. 15), os *jogos de treinamento* auxiliam na "memorização ou fixação de conceitos, fórmulas e técnicas ligadas a alguns tópicos de conteúdo", como reforço de aprendizagem; já os *jogos de estratégia* propõem-se a desenvolver o raciocínio lógico. Eles caracterizam-se por apresentar a elaboração de estratégias para vencer, mas sem a interferência de sorte nas jogadas, provocando, assim, uma maior reflexão na ação do jogar, pois o sucesso irá depender exclusivamente da ação decidida pelo jogador.

Na concepção de Grando e Marco (2007, p. 102), o jogo é apresentado com a finalidade de introduzir ou desencadear conceitos, ou de aplicar conceitos que já foram formados. Vale ressaltar que ambas as finalidades podem ser trabalhadas num mesmo jogo. Tanto a finalidade como os objetivos deverão ser definidos pelo professor de acordo com seu planejamento.

Analisando as classificações desses e de outros autores, identificam-se dois tipos comuns: o jogo que utiliza um conhecimento já internalizado e o jogo como desafio a novas produções intelectuais. Ambos preveem a participação coletiva, que se efetivará por meio de interações provocadas pela situação de jogo e pelo uso da linguagem.

Borin (2007, p. 9) nos traz uma importante justificativa para o uso de jogos na educação matemática. Segundo ele, o jogo é uma

> [...] possibilidade de diminuir os bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes positivas frente a seus processos de aprendizagem.

A seguir, apresentamos um episódio extraído do estudo de Raupp (2009), com foco nas interações em situação de jogo.

EPISÓDIO COM O JOGO MARCA PONTO

Este episódio aconteceu com uma turma de sexta série de uma escola particular de Passo Fundo/RS, composta de vinte e cinco estudantes. A intenção da professora era retomar conceitos estudados na série anterior, como potências, raízes, expressões com números inteiros, operações com frações e conceitos de geometria. Para isso, buscou uma atividade que fosse dinâmica e estimulasse a turma toda a participar, ao invés de começar com uma lista de exercícios de revisão.

Em sala de aula, a professora listou, junto com os estudantes, conteúdos estudados na série anterior: operações com inteiros, múltiplos, divisores, números primos, frações, decimais, potenciação, radiciação, expressões numéricas,

medidas de comprimento, medidas de superfície e figuras planas. Solicitou, então, que elaborassem, em trios, duas perguntas sobre os conteúdos relacionados com o objetivo de iniciar uma sondagem sobre conceitos aprendidos.

Chamou a atenção da professora o fato de que a maioria das questões elaboradas envolviam potenciação e radiciação. Ao questionar aos estudantes sobre essa preferência eles responderam que havia sido uma matéria "fácil e bem legal". Para ampliar e diversificar foram elaboradas outras questões, contemplando os diferentes conceitos.

Num momento posterior a professora organizou as perguntas em pequenas fichas, contendo as respostas para que o estudante escolhido como coordenador do jogo verificasse o acerto das questões. No planejamento da aula, conforme consta no plano de ensino, o objetivo era "revisar conceitos; trabalhar o cálculo mental".

A turma foi dividida em dois grupos com 12 componentes cada. Um grupo ficou de frente para outro, sendo seis jogadores mais próximos do interruptor (grupo que respondia) e seis mais afastados, mas que também participam da discussão; além de um coordenador que fazia a leitura das perguntas e marcava os pontos.

Como material, foram utilizadas duas torres com uma lâmpada em cada: uma torre para cada grupo, ligadas aos interruptores para acionar as lâmpadas. As regras eram as seguintes: 1) só pode responder quem acender primeiro a lâmpada da sua equipe; e 2) a resposta deve ser imediata e correta, sob pena de perder o ponto para o outro grupo.

Na proposta do jogo para a turma foi explicitada a intenção de compartilhar e verificar os conceitos estudados até o momento. Observou-se que a atividade envolveu o grupo em discussões rápidas, às vezes tensas, em razão da pressa para responder primeiro. Após a leitura da pergunta pelo coordenador, os grupos deveriam decidir sobre a possível resposta. Os que se arriscavam a acionar o interruptor e responder eram normalmente os mesmos estudantes que costumavam se expor mais em aula. Quando o grupo acertava a resposta, era visível a alegria da conquista, muito mais por perceberem que estavam certos do que pelo ponto marcado; ao contrário, quando não acertavam, o que

se observava era que os dois grupos achavam "graça" nas respostas e faziam comentários, como o que segue:

> *Sequência 1*
>
> 1. Coordenador: Como se chama a figura geométrica que possui sete lados?
> 2. Ana (grupo1): Triângulo!
>
> Imediatamente o riso tomou conta de todos e, numa fração de segundo, Ana se manifestou novamente:
>
> 3. Ana: Ai não! (risos), triângulo é três lados!

Ana era considerada pelos colegas como alguém extremamente estudiosa; por isso, talvez, o fato de ela ter errado a resposta provocou surpresa. As vozes dos colegas se misturavam entre querer dizer a resposta correta e querer questionar se a figura que tem sete lados chama-se triângulo: "Então como se chama a que tem três lados?".

A turma percebeu que não se tratava de um erro de conhecimento, mas de uma falha na atenção da colega ao escutar a pergunta, pois mal o coordenador havia terminado de ler a questão o interruptor já fora acionado. Ana comentou, depois, que se lhe tivesse sido mostrada a figura (heptágono) antes da pergunta sobre a sua denominação, ela não teria se enganado. Essa justificativa pode ser compreendida, segundo Vigotski (2005, p. 99), como uma dificuldade dos adolescentes em "definir um conceito quando este não mais se encontra enraizado na situação original, devendo ser formulado num plano puramente abstrato, sem referência a quaisquer impressões ou situações concretas". A rapidez exigida no jogo, além do fato de a pergunta ter sido feita oralmente, sem qualquer referência visual, pode ter levado a jogadora a não lhe dar a atenção necessária. Ao escutar o início da frase "como se chama a figura geométrica [...]", imediatamente nomes de figuras consolidadas na memória da estudante, como "triângulo", vieram a sua mente, assim, na pressa por responder primeiro, não houve um pensamento de forma consciente sobre a resposta que seria dada. Este tipo de comportamento é referido por Pozo (2002, p. 121), que analisa os erros que cometemos diante de situações como esta: "A resposta é disparada ante os indícios habituais sem que nos demos conta

de uma leve diferença na situação, o que nos leva a um erro irreparável". No caso de Ana, a "leve diferença" de que ela não se deu conta estava no número de lados (sete) indicado na pergunta.

Aos poucos os mais tímidos foram participando da atividade, querendo dizer em voz alta suas respostas, cada qual do seu jeito, sempre buscando saber qual era a resposta mais correta. O medo do erro e da exposição foi ficando de lado, afinal de contas, uma das melhores colegas em nota da turma já tinha passado por isso. A maneira descontraída como estavam interagindo, mantendo o foco da atividade na rapidez com que acionavam o interruptor, desviou a atenção do medo do erro, que passou a ser visto como um engano perdoável em virtude da tensão a que estavam afeitos. A correção dos "enganos" aconteceu de forma tranquila pelos próprios colegas. Borin (2007, p. 5) relata situação semelhante ocorrida em seu trabalho de pesquisa com jogos:

> [...] como a todo o momento tinham que corrigir os próprios erros, ou o dos colegas, este corrigir e ser corrigido por seus pares eram mais eficientes do que a correção pelo professor, pois seus pontos de vista são semelhantes e a linguagem entre eles mais próxima.

Outro aspecto que se destaca nesta atividade foi com relação aos extremos na atitude de confiança, uns pelo excesso (sem consultar o grupo, acionavam o interruptor com a certeza de que estavam certos, mas forneciam uma resposta incorreta) outros pela falta (sabiam a resposta correta, mas não tinham confiança para sequer argumentar com o grupo maior). Segue uma sequência em que essa situação fica registrada:

Sequência 2

1. Coordenador: Qual o valor da subtração da raiz quadrada de 100 e da raiz quadrada de 49?

Os dois grupos cochichavam e percebeu-se que alguns ainda estavam conversando quando um aluno do grupo 1 resolveu, independentemente da opinião do seu grupo, acionar o interruptor e responder à questão:

2. Pedro: Doze!

O coordenador disse que não estava correto, passando o ponto para o outro grupo. Enquanto isso Cláudia e Ana, do mesmo grupo que Pedro, conversavam e perguntavam ao coordenador:

3. Cláudia: Não é três?
4. Coordenador: É três!
5. Cláudia: (dirigindo-se a Ana) Viu? Eu falei pra ti que era dez menos sete!
6. Ana: E por que tu não falou?
7. Cláudia: Ah... sei lá.

Pedro apenas observou a conversa, sem se justificar nem se manifestar. Ninguém criticou o colega, apesar de ele não ter seguido a regra combinada de dialogar primeiro com o grupo para ter a aceitação da maioria e, só então, acionar o interruptor. Outros colegas continuaram conversando sobre as hipóteses levantadas. Cláudia era uma aluna que, mesmo demonstrando conhecimento, insistia em dizer que tinha dificuldade em matemática. Normalmente, em sala de aula, questionava se suas respostas e o desenvolvimento de suas questões estavam corretos, demonstrando falta de confiança em si.

A sequência acima alerta para o cuidado com a colaboração entre pares, considerando-se a relação entre competência e confiança. Tudge (2002, p. 158) focou sua pesquisa na colaboração entre pares de estudantes, observando que havia diferença entre os níveis de competência (habilidade para resolução de problemas) e confiança em relação às crenças individuais, especialmente nos casos em que parceiros mais avançados não eram necessariamente os mais confiantes em si. Em sua pesquisa, o autor destaca como fator importante o grau de confiança que cada parceiro traz para a interação, questionando, inclusive, a certeza da eficácia da interação entre colegas.

> Mas será que as opiniões da criança mais competente sempre prevalecem? Quando duas crianças estão trabalhando para resolver um problema, uma pode estar mais avançada em seu pensamento, mas constitui questão ainda em aberto saber se a outra criança está tão desejosa de aceitar o ponto de vista de seu parceiro como estaria se seu parceiro fosse um adulto. Em outras palavras, quando um adulto fornece informação dentro da zona de desenvolvimento proximal da criança, o desenvolvimento realmente pode ocorrer. Mas poderemos estar assim tão certos sobre o resultado quando a interação se dá entre colegas? (TUDGE, 2002, p. 154).

Na sequência 2, turno 5, Cláudia demonstrou competência ao explicar a origem da resposta, porém faltou-lhe confiança para expor ao grupo seu

pensamento. Felizmente, o ambiente do jogo proporcionava a discussão e, dessa forma, Cláudia teve a confirmação de que sua ideia estava correta.

Numa outra pergunta, a discussão foi mais intensa no grupo 2:

Sequência 3

1. Coordenador: Qual o valor decimal da fração três quartos?
2. Luis : Eu sei! Eu sei! É...peraí....é quartos é...
3. Renan: Tem que dividir por quatro!
4. Paulo: Não, divide por três! Ou é por quatro?
5. Lia: Mas o que é que tem que dividir? Ele não disse outro número.
6. Luis: Não precisa outro número... é aquele negócio do um real...
7. Renan: Ah! É mesmo, é vinte e cinco centavos!
8. Lia: Mas na pergunta não tem dinheiro. É centésimos.

Enquanto isso o outro grupo ouvia a discussão e, novamente, Pedro (grupo 1) acionou o interruptor sem a permissão dos demais e respondeu:

9. Pedro: Vinte e cinco centésimos!
10. Coordenador: Resposta errada. Ponto para o outro grupo.
11. Ana: Pedro de novo! Quem te mandou apertar? Tu vai passar prá trás! (como uma ordem).

Desta vez Pedro foi advertido, pois ficou claro o desrespeito para com as regras e com o grupo, colocando em risco o sucesso da equipe e por isso Ana sentiu-se no direito de ameaçar excluí-lo, pois estava prejudicando a maioria. Pedro não demonstrou agir desonestamente, mas seu desejo de ganhar foi maior que o espírito de lealdade para com a equipe, o que abalou o clima do jogo. A atitude de Pedro é caracterizada por Huizinga como a de um sujeito que foi desleal ao seu grupo, agindo por conta própria, não permitindo que os demais jogassem. Portanto,

> o jogador que desrespeita ou ignora as regras é um “desmancha-prazeres”. Este, porém, difere do jogador desonesto, do batoteiro, já que o último finge jogar seriamente o jogo e aparenta reconhecer o círculo mágico. É curioso notar como os jogadores são muito mais indulgentes para com o batoteiro do que com o desmancha-prazeres; o que se deve ao fato de este último abalar o próprio mundo do jogo. Retirando-se do jogo, denuncia o caráter relativo e frágil desse mundo no qual, temporaria-

> mente, se havia encerrado com os outros. Priva o jogo da *ilusão* – palavra cheia de sentido que significa literalmente "em jogo" (de *inlusio*, *illudere* ou *inludere*). Torna-se, portanto, necessário expulsá-lo; pois ele ameaça a existência da comunidade dos jogadores. (HUIZINGA, 1990, p. 14, grifo do autor).

Percebeu-se certa agitação no outro grupo, que, em seguida, fez questão de dizer que sabia a resposta correta, explicando aos demais que vinte e cinco centésimos correspondiam a um quarto e que a resposta correta era setenta e cinco centésimos. Luis ainda comentou que sempre que precisa utilizar alguma fração com denominador quatro recorre a um problema resolvido um ano antes, pois na ocasião foi algo que o marcou muito pelo entendimento que lhe proporcionou. O problema a que fez menção era simples, realizado em uma atividade de sala de aula com material de apoio (dinheiro de brinquedo), em que era preciso dividir R$1,00 em quartos.

Para que o grupo de Luis chegasse à resposta correta houve a necessidade de relembrar o que fora aprendido anteriormente para, assim, pensar sobre o assunto (VIGOTSKI, 2007, p. 49). A lembrança de Luis (turno 6) permitiu que os colegas, nos turnos seguintes, conseguissem responder as atividades, participando com entusiasmo da explicação dada posteriormente. Essa situação ilustra o que Vigotski (2007, p. 50) caracteriza como forma superior de comportamento, quando "os seres humanos, por si mesmos, criam um elo temporário através de uma combinação artificial de estímulos". No caso de Luis, o elo criado foi a lembrança da situação vivenciada na atividade de repartir um real para que os alunos, dessa forma, repensassem sobre a resolução do problema apresentado.

Pelo fato de não se tratar de um conteúdo específico, mas da retomada de vários conceitos, percebe-se que o jogo proporcionou aos estudantes pensar sobre o que haviam vivenciado em outros estudos. Ao serem "exigidos" a encontrar respostas eles estabeleceram relações com os significados já internalizados, demonstrando segurança nas afirmações feitas, a exemplo do que disse Ana na sequência 1, turno 3: "triângulo é três lados"; Cláudia, na sequência 2, turno 5: "eu falei pra ti que era dez menos sete"; e Renan, na sequência 3, turno 3: "tem que dividir por quatro".

O ato de pensar esteve diretamente relacionado à memória lógica dos estudantes, que procuraram lembrar o que haviam estudado, o que foi possível em razão da mudança que ocorre no papel da memória, que na fase inicial da infância é mecânica, mas que depois transforma-se em memória lógica no decorrer do processo de desenvolvimento. Assim, nas palavras de Vigotski (2007, p. 49, grifo do autor),

> *para as crianças, pensar significa lembrar; no entanto, para o adolescente, lembrar significa pensar*. Sua memória está tão "carregada de lógica" que o processo de lembrança está reduzido a estabelecer e encontrar relações lógicas; o reconhecer passa a considerar em descobrir aquele elemento que a tarefa exige que seja encontrado.

Durante o jogo, não houve intervenção direta da professora junto aos estudantes, ficando sob responsabilidade do coordenador dizer se as questões estavam certas ou não. A professora só se manifestou após a atividade, quando todos voltaram para os seus lugares, retomando oralmente algumas questões que geraram polêmica, muito mais nas atitudes do que no conteúdo matemático, como os erros que se pode cometer ao se pensar muito rapidamente sob pressão, a insegurança, que pode levar a se deixar de tentar fazer o que está ao alcance e a qualidade do trabalho em grupo, que pode ser colocada em risco no caso de não se respeitar a combinação estabelecida.

A interação entre os estudantes proporcionada pelo jogo Marca Ponto atingiu a turma como um todo, ou seja, atingiu o grande grupo. Apesar de algumas discussões acontecerem em pequenos grupos, havia interesse de todos em saber o que se passava, já que a dinâmica do jogo proporcionava o diálogo entre todos os jogadores. Quando algum colega não compreendia o porquê da resposta dada, outro, que nem sempre era da mesma equipe, imediatamente explicava-lhe, socializando o conhecimento. Conforme Grando, "nesse processo de socialização no jogo, a criança ouve o colega e discute, identificando diferentes perspectivas e justificando-se" (GRANDO, 2004, p. 26).

A cada cinco perguntas realizadas, havia troca de lugares, a fim de que todos pudessem interagir de diferentes formas, pois, como era de se esperar, a participação mais dinâmica das discussões deu-se com aqueles que se sentaram próximos aos interruptores.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O JOGO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Para que possamos nos utilizar do jogo no processo ensino-aprendizagem da matemática, uma premissa importante a ser considerada é a de que o mesmo deve fazer parte do planejamento, contendo a definição dos objetivos a serem alcançados, quer sejam relacionados aos aspectos cognitivos, afetivos ou sociais.

Na concepção de Moura (1991, p. 49),

> o jogo pode, ou não, ser jogo no ensino. Ele pode ser tão maçante quanto a resolução de uma lista de expressões numéricas: perde a ludicidade. No entanto, resolver uma expressão numérica também pode ser lúdico dependendo da forma como é conduzido o trabalho.

Como pudemos observar pelo episódio do jogo apresentado, a participação dos estudantes e a organização de cada grupo é fundamental para que as interações provoquem diálogos significativos em torno de conteúdos básicos já estudados. Com o objetivo de revisar conceitos e trabalhar o cálculo mental a professora deixou transparecer aos estudantes a necessidade do envolvimento da turma, desde a elaboração das primeiras questões até o final do processo de jogo.

A concepção de que a interação é um dos principais elementos na promoção da aprendizagem e do desenvolvimento reflete-se no processo discutido, que foi mediado pela linguagem, ainda que de forma lúdica e sem deixar de focar o objetivo proposto. Moura (1991, p. 47-48) faz referência a essa questão, ao afirmar que,

> ao utilizar o jogo como objeto pedagógico, o professor já tem eleita (ou deveria ter) uma concepção de como se dá o conhecimento. Esta concepção tem como elementos principais o papel reservado à interação como fator de desenvolvimento e as ideias de que o conhecimento evolui, de que o ensino deve ser lúdico e de que o objetivo final é o conceito científico.

Os estudos sobre jogos e a experiência na sala de aula mostraram que os estudantes aproveitaram a oportunidade de revisar conceitos já estudados de forma a mostrar o que cada um havia conseguido internalizar, ampliando seus conhecimentos específicos e gerais.

Pôde-se, também, perceber que o jogo proporcionou um espaço de confiança e espontaneidade, dentro do qual os estudantes buscavam o acerto, ainda que sem receio de falhar.

REFERÊNCIAS

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME - US, 2007.

BROUGÈRE, G. **Jogo e educação**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

BRUEGHEL, P. **Jogos infantis.** 1560. 1 reprodução de arte. Disponível em: <http://meusbrinquedosantigos.blogspot.com.br/2012/04/pieter-bruegel-jogos-infantis.html>. Acesso em: 13 jun. 2013.

ELKONIN, D. B. **Psicologia do jogo**. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, São Paulo, ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FRIEDMAN, Adriana. **Brincar**: crescer e aprender – o resgate do jogo infantil. São Paulo: Moderna, 1996.

GÓES, M. C. R. de. A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. **Cad. CEDES**, Campinas, n. 50, p. 9-25, 2000.

GRANDO, R. C. **O jogo e a matemática no contexto de sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

GRANDO, R. C.; MARCO, F. F. de. O movimento da resolução de problemas em situações com jogo na produção do conhecimento matemático. In: MENDES, J.R; GRANDO, R. C. (Org.). **Múltiplos olhares**: matemática e produção do conhecimento. São Paulo: Musa, p. 95-118. 2007.

HUIZINGA, J. **Homo ludens:** o jogo como elemento da cultura. São Paulo: Perspectiva, 1990.

LEONTIEV, A. N. Os princípios psicológicos da brincadeira pré-escolar. In: VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A.R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 2001. p. 119-142.

MORTIMER, E. F. **Linguagem e formação de conceitos no ensino de ciências**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2000.

MOURA, M.O de. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. 1991. Disponível em: < http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2013.

OLIVEIRA, M. K. de. **Vygotsky**: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Editora Scipione, 1999.

POZO, J. I. **Aprendizes e mestres**: a nova cultura da aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2002.

RAUPP, A. D. **Educação matemática**: processos interativos em situações de jogo no ensino fundamental. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2009.

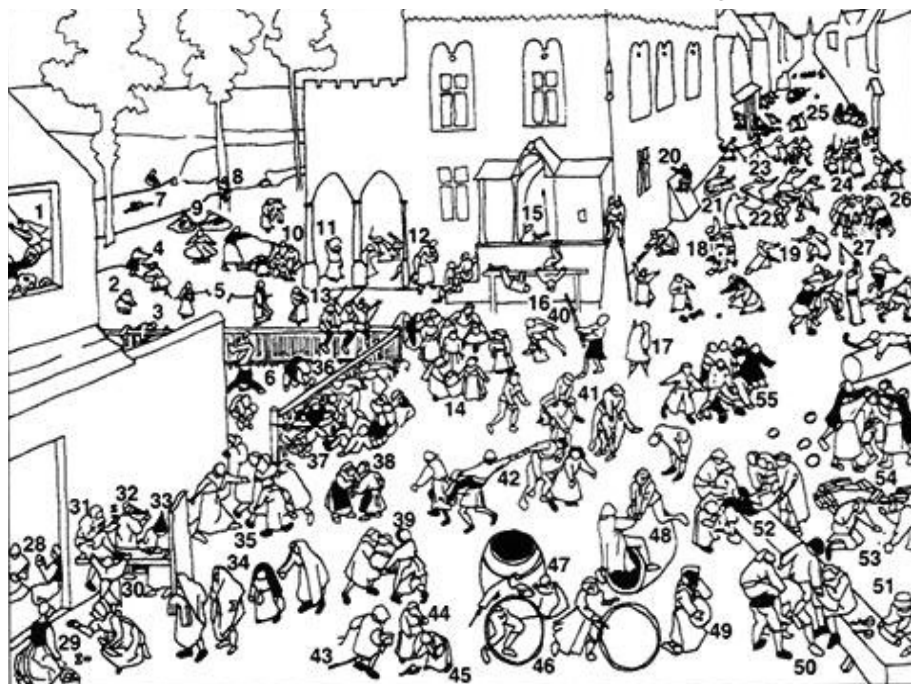
RUBINSTEIN, S. L. **Princípios de psicologia geral**. Lisboa: Estampa, 1977.

SADALLA, A. M. F. de A. **Com a palavra, a professora**: suas crenças, suas ações. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas, 1997.

TUDGE, J. Vygotsky, a zona de desenvolvimento proximal e a colaboração entre pares: implicações para a prática em sala de aula. In: MOLL, L. C. **Vygotsky e a educação***:* implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica. Porto Alegre: Artes Médicas, 2002. p. 151-168.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e linguagem**. Tradução Jefferson Luiz Camargo. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente***:* o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Tradução José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ANEXO A – Relação das brincadeiras na tela de Pieter Brueghel

1. Balançar
2. Brincar na areia
3. Subir uma cerca
4. Rei da montanha
5. Tilting*
6. Para de cabeça
7. Nadar
8. Subir em árvore
9. Fazer “queijos”
10. Fran Rose*
11. Rodar pião
12. Cavalinho
13. Montar na cerca
14. Procissão de casamento de faz-de-conta
15. Equilíbrio de cabo de vassoura
16. Balançar na grade
17. Andar sobre pernas de pau
18. Boliche
19. Jogo de bastão
20. Escalar a porta de uma adega
21. Luta
22. Pegar o urso
23. Chicote-queimado
24. Procissão de faz-de-conta
25. O chefe mandou
26. Jogo de botão
27. Jogo de bolinhas
28. Bonecas
29. Jogos de pedrinhas
30. Chocalho
31. Trabalhando um moinho feito de maçã
32. Bolhas de sabão
33. Brincadeira com passarinho
34. Batismo de faz-de-conta
35. Galinha cega
36. Cambalhota
37. Jogo de percurso
38. Par ou ímpar
39. Levando minha dama para Londres
40. Golpe na marmita
41. Sela
42. Jogo de guerra
43. Cavalinho de pau
44. Tocar tambor
45. Fazer bolas de Lama
46. Bowling Hools
47. Gritar dentro do barril
48. Montar no barril
49. Estourar uma bexiga
50. Buck, buck*
51. Brincar de loja
52. Balançar o bebê
53. Telefone-sem-fio
54. Construção com tijolos
55. Walk, moon, walk*

* Foram conservados em inglês os nomes originais de algumas brincadeiras por não haver equivalente em português. (FRIEDMANN, 1996, p. 84-85).

CAPÍTULO 04

REGISTROS ORAIS E ESCRITOS: UM ESTUDO COM ALUNOS E PROFESSORES DE EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS AO SOLUCIONAREM PROBLEMAS DE PROPORÇÃO-PORCENTAGEM

Idemar Vizolli
Maria Tereza Carneiro Soares

O DESCORTINAR DO OBJETO DE PESQUISA

Uma das formas de tematizar a realidade é buscar em nossa história de vida elementos que nos instigaram ou intrigaram, ou que nos despertaram desejos ou frustrações e que resultam em problemas para os quais não temos solução e que talvez nem cheguemos a tê-la. De qualquer forma, são perguntas para as quais ainda não encontramos respostas ou curiosidades ainda não satisfeitas.

Na pesquisa que originou este trabalho voltamos nosso olhar para o ensino da matemática. Queríamos saber, especificamente, como pessoas sem escolarização ou pouco escolarizadas solucionam problemas de matemática em seu contexto social imediato e quais estratégias utilizam para solucionar problemas que lhes são propostos em situação escolar.

No trabalho e em muitas situações da vida cotidiana, precisamos analisar dados e informações que são apresentados por meio de gráficos, tabelas ou índices e, por meio delas. é preciso tomar decisões. Muitas vezes as análises necessárias dependem de conhecimentos de proporção-porcentagem. A compreensão de tal conceito pode fazer a diferença entre ser ou não ser ludibriado

por propagandas enganosas ou dados e informações distorcidas. Além disso, a proporção-porcentagem é de grande aplicabilidade em situações não só da vida cotidiana das pessoas (como cálculo de salários ou transações comerciais e financeiras), mas também em outras áreas do conhecimento, como na física, na biologia na química, na estatística, entre outras.

Ao tratar de proporção-porcentagem, é possível encontrar uma série de outros conceitos e relações, como, por exemplo, a multiplicação, a divisão, a razão, a fração e a comparação. Neste processo, pode ser relevante também a compreensão de outros conceitos matemáticos, como os de equação e função. Isso possibilita que se pense a proporção-porcentagem como objeto de estudo e não somente como uma "ferramenta" que existe em função de sua aplicabilidade.

Pesquisadores como Fonseca (2001, 2002), Carraher e Schliemann (1988), Carvalho (1995), entre outros, indicam que pessoas pouco escolarizadas, que sabem solucionar alguns dos problemas de seu contexto social, não veem relação entre o que fazem com os conhecimentos matemáticos de que necessitam para ter sucesso na escola. Acreditamos que muitos professores possuem dificuldades em identificar a relação entre os conhecimentos matemáticos implicados na solução dos problemas e a matemática escolar. Ainda que consigam fazê-lo, dificilmente reconhecem a relevância de se estabelecer essa relação para o aprendizado da estratégia escolar e, mais ainda, para ampliá-la e aprimorá-la.

Além de saber como as pessoas adultas solucionam problemas de matemática em seu contexto social é importante que os professores de matemática identifiquem os conhecimentos matemáticos não escolares apresentados nessas soluções, para que possam utilizar tais conhecimentos como forma de valorização do que é produzido socialmente. Acreditamos ainda que se os professores utilizarem os diferentes registros de representação semiótica como ponto de partida e de ancoragem para a proposição e para o desenvolvimento de atividades, auxiliarão os alunos a ampliarem os conhecimentos que estes já possuem.

O processo de ensino e aprendizagem na Educação de Jovens e Adultos (EJA), talvez mais que nas demais modalidades educativas, precisa levar em

conta os conhecimentos que os sujeitos já apresentam, possibilitando aos alunos condições para que atribuam significados não só às representações com que se deparam em seu contexto social, mas também àquelas convencionais e que se fazem presentes nas mais diferentes formas de comunicação.

O REVELAR DO OBJETO INVESTIGADO

Ao analisar as pesquisas na área, principalmente aquelas voltadas à educação matemática na EJA, percebemos que autores como Duarte (1987), Carraher, Carraher e Schliemann (1988), Carvalho (1995), Fonseca (2001; 2002), entre outros, compartilham da ideia de que os alunos possuem conhecimentos de matemática oriundos de seu contexto social mais imediato e que as estratégias ali utilizadas na solução de problemas diferem daquelas comumente empregadas no processo de escolarização.

Embora os professores reconheçam que os alunos ancoram seus raciocínios em situações relacionadas a sua vida prática, raciocínios úteis em espaços sociais que não a escola, pouco se tem refletido sobre o modo como os alunos e mesmo os professores de EJA escrevem a solução de problemas de proporção-porcentagem e muito menos sobre os registros de representação que são utilizados no processo de solução de tais problemas. Poucas vezes os professores exploram, para fins de conceitualização dos objetos matemáticos, o modo como os alunos solucionam os problemas "ensinados" no processo de escolarização.

Fonseca (2001) observou que os professores de EJA tendem a interpor resistência às reminiscências das experiências escolares anteriores dos alunos, muitas vezes ignorando-as ou até mesmo reprimindo-as, o que sugere uma certa insensibilidade ou despreparo que não lhes permite reconhecê-las e muito menos integrá-las à dinâmica do processo de ensino e aprendizagem atual. O autor (2001, p. 5) observa, ainda, que há por parte de alguns professores "uma má vontade confessa em relação aos conhecimentos escolares prévios dos alunos que se 're-escolarizaram', que busca justificar-se colocando sob suspeita a qualidade dessa experiência escolar pregressa – que resultou em 'fracasso' e 'abandono'". Segundo Fonseca (2001, p. 6), "a escola que, ao menos no nível do discurso, já reconhece como significativa a experiência de vida

do aluno, descarta, no entanto, sua experiência de vida escolar, renegando-a ou, simplesmente, ignorando-a, caso ela não se restrinja e corresponda aos pré-requisitos já estabelecidos para o 'avanço' da matéria".

A experiência docente que tivemos na EJA permite-nos dizer que tais resistências se manifestam muito mais quando a proposta pedagógica não é ou não foi devidamente pensada, discutida, elaborada e implementada pelo coletivo do corpo docente que atua ou vai atuar na EJA. Isso não significa dizer que não há resistências. O grande desafio para os professores, principalmente de matemática, reside na superação das limitações advindas da falta de conhecimentos sobre a forma de ensinar matemática e sobre a forma como alunos adultos estruturam seu pensamento para solucionar problemas trabalhados no contexto de sala de aula.

Nossas vivências e experiências profissionais têm mostrado que os alunos de EJA, quando estimulados, são capazes de expressar a forma como organizaram os dados e as informações presentes no enunciado do problema. No entanto, o fazem com mais desenvoltura através da oralidade e não pela escrita – o que não significa dizer que não se utilizem de raciocínios organizados.

O exercício da docência tem indicado que uma das dificuldades dos alunos de EJA em efetuar registros de representação em matemática (se não a maior delas) reside na falta de conhecimentos das regras de significado e funcionamento da linguagem desta disciplina. A linguagem matemática, assim como as demais formas de comunicação em que se faz uso de signos, necessita de regras para que a mensagem possa ser comunicada a outrem. O domínio das "regras de significado e funcionamento", em toda forma de linguagem escrita, seja ela em "língua natural", numérica, algébrica, entre outras, não é uma tarefa trivial para os alunos – muitas vezes nem para os professores (DUVAL, 1993; 1995).

Os professores, diferentemente dos alunos, estão permanentemente em contato com diferentes formas de comunicação por meio de escrita. Mesmo aqueles que não ensinam matemática fazem uso dela para explicar determinadas situações ou conceitos da disciplina que lecionam. Além disso, frequentaram ou frequentam o processo de escolarização formal, quer em cursos de

graduação, quer de pós-graduação, quer em cursos de formação continuada. Esse contato sistemático com diferentes formas de comunicação por meio da escrita constitui-se num elemento facilitador para o acesso a quaisquer regras de significado e funcionamento, inclusive da linguagem matemática.

Como os professores são indispensáveis ao processo de escolarização e como uma de suas principais tarefas é propiciar as condições para que os alunos ampliem sua gama de conhecimentos – o que exige, principalmente, a utilização de registros que obedeçam a regras de significado e funcionamento –, é fundamental (também para o ensino de matemática) que eles utilizem diferentes registros de representação. Não só isso, é preciso fazer a conversão dos registros de representação em sistemas semióticos diferentes, para que os alunos passem a se familiarizar com eles, de modo a perceber que o uso variado da linguagem matemática permite o desenvolvimento de um pensamento matemático mais flexível. Assim, a metodologia utilizada pelo professor, aliada a sua postura perante o conhecimento, pode fazer a diferença no processo de escolarização.

Esse panorama nos permitiu estabelecer os seguintes objetivos:

a) Identificar os conhecimentos matemáticos que são mobilizados pelos professores e alunos de um curso de EJA ao solucionarem problemas de proporção-porcentagem.

b) Identificar os registros verbais escritos utilizados pelos professores e alunos desse mesmo curso ao solucionarem esses mesmos problemas.

O APORTAR NO REFERENCIAL TEÓRICO: REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Pesquisadores em educação matemática, como Almouloud (2003), Bittar (2003), Damm (1992; 1999; 2003), Freitas (2003), Maranhão e Igliori (2003), Nehring (2001), entre outros, têm desenvolvido pesquisas sobre a forma como se processa a aprendizagem de conhecimentos matemáticos, com base na teoria proposta por Duval (1993; 1995; 2003).

Para esses autores, em matemática toda comunicação se estabelece com base nas representações dos objetos a serem estudados. Há consenso entre

eles de que os objetos matemáticos são conceitos, propriedades, estruturas e relações que expressam diferentes situações de modo que, para seu ensino, é preciso levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto.

De acordo com Duval (1993), um objeto matemático não é algo pronto, acabado, mensurável ou fisicamente observável. Ele é composto por estruturas ou relações que podem expressar diferentes situações, por isso é preciso considerar as diferentes formas de representá-lo. Muitas vezes o professor de matemática lança mão de recursos didáticos demonstrativos, visuais ou manipulativos, que nem sempre auxiliam o aluno a expressar certas situações matematicamente. No entanto, é indispensável que o professor tenha clareza da diversidade de registros de representação semiótica, além de seus respectivos tratamentos e conversões, coordenando assim as transformações entre eles.

Para o autor (1993; 1995; 2003), o *tratamento* é a transformação de uma representação de partida em uma representação de chegada dentro de um mesmo registro (DUVAL, 1995, p. 40). A *conversão*, por sua vez, é a transformação de um sistema de representação semiótica para outro sistema igualmente semiótico (DUVAL, 1993; 1995; 2003). Ela é uma transformação externa ao registro de representação de partida.

Para Duval, (1993, p. 38), "as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, as quais têm suas construções próprias de significado e funcionamento". Elas se caracterizam por "um sistema particular de signos, a linguagem, escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e que podem ser convertidos em representações equivalentes dentro de outro sistema semiótico, mas podem apresentar significados diferentes para o sujeito que as utiliza" (DUVAL, 1995, p. 17).

De acordo com o autor (2003), as representações semióticas são fundamentais, primeiramente pela existência de diversas possibilidades de tratamento matemático, além disso, pelo fato de os objetos matemáticos não serem diretamente perceptíveis ou observáveis sem a ajuda de instrumentos.

Ao tratar do ato de construção do conhecimento, Duval (1993; 1995) estabelece três tipos de perspectivas para o termo *representação*: representações

mentais, representações internas ou computacionais e representações semióticas.

As representações mentais têm função de objetivação, portanto, são internas e conscientes, ocorrendo no nível do pensamento, daquilo que se tem em mente. Elas estão no mesmo patamar das concepções prévias acerca de determinados fenômenos ou fatos, incluem também as fantasias criadas durante a infância. Segundo Duval (1993, p. 38), as representações mentais "recobrem um conjunto de imagens e, mais globalmente, as concepções que o indivíduo tem sobre um objeto, sobre uma situação ou sobre alguma coisa a que está associado". Elas estão relacionadas ao método da conversão.

As representações internas ou computacionais, por sua vez, estão relacionadas ao tratamento e se caracterizam pela execução automática de uma determinada tarefa. As representações mentais são internas e não conscientes. O sujeito apenas as executa, utilizando-se de regras, macetes, fórmulas ou esquemas, sem pensar em todos os passos lógicos. A noção de representação interna é fundamental porque permite mudar a forma de acordo com o nível de tratamento considerado. As representações computacionais traduzem as informações externas de um sistema, em uma forma que seja possível recuperá-las e combiná-las em seu interior. Referem-se a teorias que privilegiam um tratamento no qual a noção de representação é concebida como uma representação interna ou computacional. O tratamento está ligado à forma como se apresenta determinada informação ou determinado conceito e não a seu conteúdo.

Muitas vezes as representações mentais não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas, em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas (DUVAL, 2003, p. 31). As representações semióticas dependem das representações mentais e computacionais. Ao mesmo tempo, tais representações realizam, sucessivamente, funções de objetivação e tratamento – lembrando que o tratamento não é automático e sim intencional, o que é fundamental para a aprendizagem humana (DUVAL, 1995).

As representações semióticas pressupõem que se leve em consideração a existência de diferentes sistemas semióticos, permitindo, assim, a operação cognitiva de conversão das representações entre os diferentes sistemas semióticos.

Para Duval (1993; 1995), existem três atividades cognitivas de representação inerentes à *semiósis*: a formação, o tratamento e a conversão. A formação de uma representação constitui um registro semiótico particular, seja para exprimir uma representação mental ou um objeto real. De qualquer forma, ela implica sempre a seleção das características e determinações que constituem o que se quer representar. A formação de uma representação semiótica exige a utilização de signos que possam expressar o objeto e até mesmo mudar de registro. As representações idiossincráticas e as notações que dão nome aos objetos não se caracterizam como registros de representação semiótica. Estes, necessariamente, têm que respeitar as regras do sistema utilizado, não somente para fins de comunicabilidade, mas principalmente, para tornar possível a utilização de modos de tratamento.

Nas representações idiossincráticas, predominam as regras de produção, enquanto nos registros de representação semiótica levam-se em consideração as regras de conformidade. Segundo Duval (1995), são as regras de conformidade que definem um sistema de representação e os tipos de unidades constitutivas de todas as representações possíveis de um registro. Elas também identificam um conjunto de elementos físicos ou traços como sendo uma representação de alguma coisa.

O tratamento dado a um determinado objeto depende da forma adotada para representá-lo e não do conteúdo ao qual está vinculado o conhecimento. Segundo Duval (1993), um objeto representado não deve ser confundido com o conteúdo da representação, sob o risco de não dar conta da real diferença que existe entre duas ou mais representações de um mesmo objeto. O conteúdo da representação depende em parte da forma, uma vez que o conteúdo do registro é que permite explicitar o objeto representado.

As representações mentais, as representações computacionais e as representações semióticas não são espécies diferentes de representação,

uma vez que estão imbricadas, ainda que realizando trabalhos diferentes. De outra maneira, podemos dizer que as representações podem ser convertidas em representações similares ou equivalentes num outro sistema semiótico, podendo ter significados diferentes para as pessoas que o utilizam.

No ensino e na pesquisa – e em especial na educação matemática – temos de lembrar que estamos lidando com objetos, na maioria das vezes abstratos, algo que não é manipulável, pronto, acabado ou fisicamente observável e que, portanto, pode ter vários significados. Temos em nossas mãos estruturas ou relações que podem expressar diferentes situações ou fatos que não são acessíveis à percepção, necessitando de uma representação, que é a base da comunicação, uma vez que expressa o conhecimento que se tem de um objeto de estudo, constituindo-se em uma expressão escrita.

Gráficos, símbolos, figuras, fórmulas, desenhos, conceitos e outros são representações significativas, uma vez que a sua utilização permite a comunicação entre as pessoas e as atividades cognitivas do pensamento, garantindo diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático.

Quando se trabalha com problemas, por exemplo, o fundamental não são os desenhos que podem ser feitos a partir do enunciado, nem mesmo as operações matemáticas envolvidas, mas sim o entendimento que se deve estabelecer entre o enunciado, a representação intermediária e o tratamento matemático, uma vez que este objeto não é claro e acessível como os objetos físicos – exatamente por isso, seu tratamento depende de uma representação semiótica. Segundo Duval (1993, p. 38), “as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação; elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento”.

Como se vê, as representações semióticas não são apenas exteriorização das representações mentais necessárias para se estabelecer uma comunicação, uma vez que o indivíduo que aprende necessita delas também para elaborar o conhecimento. Portanto, elas desempenham funções de cognição (tratamento, conversão e representação).

Para Duval (2003), a utilização de vários registros de representação propicia o desenvolvimento do conhecimento humano e possibilita a criação

de novos sistemas semióticos, a exemplo da evolução nos sistemas de numeração utilizados pela humanidade no decorrer do tempo. O progresso dos conhecimentos é oriundo da criação e do desenvolvimento de novos e mais específicos sistemas semióticos, resultados do trabalho com vários registros de representação. A criação de novos registros está diretamente relacionada às necessidades da espécie humana. Daí as diferentes bases do sistema de numeração, os números fracionários, os decimais, a porcentagem e tantas outras criações.

A PROPORÇÃO-PORCENTAGEM E SEUS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Duval (2003, p. 14) classificou os registros de representação semiótica em quatro tipos muito diferentes, conforme consta do Quadro 1. Neste quadro, apresentamos em itálico os registros de representação semiótica que devem ser mobilizáveis no fazer matemático de proporção-porcentagem (VIZOLLI, 2001; 2006).

Quadro 1 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	Representação discursiva	**Representação não-discursiva**
Registros multifuncionais: os tratamentos não são algoritmizáveis	• Língua natural • Associações verbais (conceituais) • Forma de raciocinar • Argumentação a partir de observações, de crenças • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas • *Registro verbal oral*	• Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3) • Apreensão operatória e não somente perceptiva • Construção com instrumentos • *Figura geométrica*
Registros monofuncionais: os tratamentos são principalmente algoritmos	• Sistemas de escritas • Numéricas (binária, decimal, fracionária etc.), algébricas e simbólicas (línguas formais) • Cálculo • *Registro verbal escrito numérico (percentual; fracionário; decimal; tabela de proporcionalidade) e aritmético.* • *Equação* • *Função*	• Gráficos cartesianos • Mudanças de sistema de coordenadas • Interpolação e extrapolação • *Gráfico cartesiano*

Fonte: os autores

Devemos notar que, nos registros multifuncionais, os tratamentos não são algoritmizáveis. Além disso, têm como representação discursiva a língua natural, isto é, se manifestam por meio de associações verbais ou de raciocínios argumentativos ou dedutivos.

Os discursos dedutivos tomam como base as definições, as propriedades, os teoremas, entre outros, respeitando as regras da organização do discurso matemático. A passagem de uma afirmação para outra é feita com referência às regras que as justificam. Os discursos argumentativos se apoiam, principalmente, em observações e crenças, seguindo o princípio da linguagem natural. Nesse tipo de discurso existe o encadeamento semântico, no qual as afirmações vão sendo agrupadas e não se exigem regras predefinidas. Estes registros também podem aparecer na forma não-discursiva, a exemplo das configurações geométricas. Nos registros monofuncionais os tratamentos são algoritmizáveis e têm como representação os sistemas de escrita. Eles podem aparecer também de forma não discursiva, a exemplo dos gráficos cartesianos.

Ao apresentar os registros de representação semióticas necessários ao processo de conceitualização de proporção-porcentagem tomamos como exemplo o problema 1, que faz parte dos Estudos II, III e IV da pesquisa que resultou nesta tese.

Em 2003, o salário mínimo era de R$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?

a) Registro verbal oral – Trata-se da fala do participante. Ao executar o registro verbal oral o sujeito pensa sobre o objeto em questão. A fala sobre o objeto em estudo auxilia o professor-pesquisador a perceber se o aluno consegue identificar as variáveis em jogo, as quantidades e a incógnita, assim como as relações estabelecidas ou não. No caso da proporção-porcentagem é possível identificar a relação que os alunos estabelecem com a centena. É possível verificar, também, que se estabelecem relações entre a pergunta do problema e o resultado obtido. Em suma, o registro verbal oral oferece elementos para que se possa perceber se o sujeito compreende o significado da questão proposta. Ao se tratar de EJA, o registro verbal oral pode se constituir numa valiosa fonte de informações para que os professores possam conhecer o que os alunos já sabem sobre o objeto de estudo.

Tomando como exemplo o problema indicado, é possível obter respostas como esta: "eu sei que o aumento é de sessenta reais, mas não sei fazer a conta". Neste caso, "fazer a conta", significa efetuar registros escritos utilizando-se exclusivamente de símbolos ou algoritmos matemáticos.

b) Registro verbal escrito - Como o sujeito que o executa faz uso de regras gramaticais da língua materna para expressar as informações necessárias e indicar a incógnita, denominamos este registro *verbal escrito*. Assim como no registro verbal oral, esse registro não garante que o sujeito reconheça o objeto representado num registro matemático. Muitas vezes, os alunos utilizam o registro verbal escrito combinado com o registro de representação numérico. Neste caso, podemos dizer que se trata de um registro de representação semiótica misto.

Uma forma de atribuir sentido e significado operatório para solucionar o problema utilizado como exemplo é tomar como ponto de partida a taxa percentual (30%), que significa 30 de cada 100. Como o salário era de 200, então o aumento seria de 60. Esta resposta indica a compreensão do valor relativo da taxa percentual; é possível, pela adição de parcelas iguais ou pela multiplicação, encontrar o resultado matemático, o que possibilita responder à pergunta do problema.

c) Registro de representação numérico - Neste tipo de registro, o sujeito opera com os dados fornecidos pelo enunciado do problema, sem necessariamente se dar conta da possibilidade da existência de um registro algébrico. Neste tipo de registro, não necessariamente o sujeito busca apoio ou referência fora do contexto do enunciado do problema, ou seja, ele já consegue estabelecer relações entre os dados e operar algoritmicamente. Assim o sujeito opera com os dados fornecidos pelo enunciado do problema, sem necessariamente se dar conta da possibilidade da existência de um registro algébrico. Em nossa dissertação de mestrado (VIZOLLI, 2001) destacamos que cada um dos registros de representação numérico possui especificidades, embora obedeçam a determinadas regras de significado e funcionamento – como, por exemplo, as da base dez. O registro de representação numérico pode aparecer de diferentes formas: fracionária, percentual, tabela de números proporcionais, decimal e aritmético.

Para exemplificar cada uma das variações do registro de representação numérico, tomamos como referência o problema 1 (já mencionado), no qual temos:

i) Fracionário 30/100 de 200 = 3/10 de 200

ii) Percentual 30% de 200

iii) Tabela de números proporcionais

Taxa	Quantidade de referência
30	100
60	200

iv) Decimal 0,3 de 200

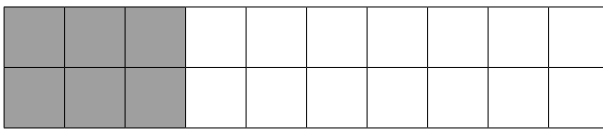
v) Aritmético (200 . 30) : 100 = 60 ou (200 : 100) . 30 = 60

É importante que se note que é possível encontrar registros de representação numérico com números fracionários (200 . 30/100 = 6000 : 100 = 60) ou decimais (200 . 0,3 = 60).

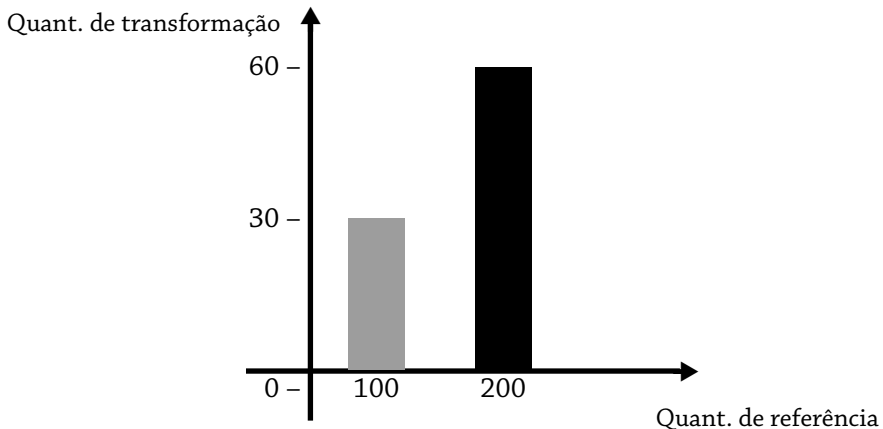
No registro de representação em tabela de números proporcionais, o sujeito reconhece a relação entre a taxa percentual e a centena, alinhando seus valores absolutos em colunas que representam quantidades distintas (quantidade inicial – qi – e quantidade de transformação – qt) e depois organizando os dados numa tabela constituída por duas colunas. A utilização do registro de representação na forma de tabela facilita a compreensão e a construção do registro de representação na forma de gráfico cartesiano (VIZOLLI, 2001).

Trata-se de estabelecer a relação entre a taxa percentual e a centena, para depois comparar esta relação, com a quantidade inicial fornecida pelo enunciado do problema, com sua respectiva taxa percentual. Assim, 30% é 30 de 100, como são R$ 200,00, então são R$ 60,00. Quando solicitado que se efetue, no papel, o registro do procedimento utilizado, podemos encontrar também o registro de representação misto. No registro de representação por tabela de números proporcionais, muitas vezes o sujeito consegue perceber as relações verticais e horizontais, por isso, esse pode ser considerado um registro mais elaborado que o registro numérico aritmético.

d) Registro de representação geométrico - Este tipo de registro pode ser efetuado com o desenho de uma figura geométrica representando a centena, por exemplo, na qual se destaca a parte correspondente à taxa percentual. Ao se tratar de registro geométrico é importante fazer a conversão passando pelo fracionário e, se for o caso, a equivalência das frações, chegando ao denominador 100, o que facilitará a percepção da porcentagem.

No caso do problema utilizado como exemplo, podemos efetuar o seguinte registro, no qual cada célula corresponde a 10 unidades e cada célula destacada corresponde a 10%.

e) Registro de representação na forma de gráfico cartesiano - Este registro de representação pode conter variações: gráfico cartesiano, gráfico de setor, gráfico por linhas ou colunas. De qualquer forma, o registro gráfico exige que o sujeito controle, pelo menos, duas variáveis, além do que, ele precisa perceber a proporção, para indicar os respectivos pares ordenados. Este registro de representação semiótica pode possibilitar ao sujeito perceber a proporção e identificar a lei de formação da função.

O exemplo que estamos utilizando pode ser representado pelo gráfico de colunas a seguir.

Figura 1 - Gráfico de colunas representando porcentagem

f) Registro de representação por equação - É constituído por uma sentença matemática aberta, expressa por uma igualdade. Trata-se de uma representação algébrica em que "x" se constitui na incógnita e assume um único valor.

No caso do problema utilizado como exemplo, é preciso estabelecer as devidas relações entre as quantidades, reconhecendo a taxa percentual como um valor relativo. Assim, 30% é 30 de cada 100. Como o problema fornece a quantidade de referência (200), há que se estabelecer as devidas relações. Isso exige o reconhecimento da propriedade fundamental da proporção: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, o que pode ser organizado numa tabela, da seguinte forma:

Ao aplicar a propriedade fundamental da proporção o sujeito se depara com a aplicação da regra de três.

Taxa	Quantidade de referência
30	100
x	200

30 . 200 = 100 . x

6000 = 100x

6000 : 100 = x

x = 60

g) Registro de representação por função - Também pode ser visto como um modelo matemático. Neste caso, o procedimento utilizado leva o sujeito a tratar com as regras de significado e funcionamento do tratamento dispensado à função. O sujeito que o executa consegue estabelecer as devidas relações entre os dados e as informações contidas no enunciado do problema, delimitando generalizações que o permitem operar algebricamente, inclusive estabelecendo um modelo matemático. Damm (1998) apresentou um modelo que pode ser utilizado aqui. Vejamos: qt = (qi x p) : 100

Para o problema utilizado como exemplo, temos o seguinte modelo:

qt = (200,00 x 30) : 100

qt = 6000,00 : 100

qt = 60,00

A partir da taxa percentual, também é possível estabelecer a função. Neste caso, tem-se uma taxa de 30%, a qual é utilizada para estabelecer uma lei matemática ou função. Assim, f(x) = 30%x ou f(x) = 30x/100 ou f(x) = 0,3x, onde f(x) é quantidade de transformação e “x”, a quantidade referência.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS PARA A REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Com o objetivo de identificar os registros de representação que são utilizados por alunos de EJA para solucionar problemas de proporção-porcentagem, no Estudo I solicitamos que três alunos do 3º Ciclo de aprendizagem (equivalente à 5ª e 6ª séries do segundo segmento do Ensino Fundamental) solucionassem, individualmente, três problemas tomados do pós-teste da pesquisa anterior (VIZOLLI, 2001)[1].

O Estudo IV foi desenvolvido com quatro duplas de alunos do 4º Ciclo de aprendizagem do EJA, no qual, em entrevista, solicitou-se que os participantes solucionassem três problemas.

Problema 1 – *Em 2003, o salário mínimo era de R$ 200,00. Se tivesse sofrido um aumento de 30%, de quantos reais teria sido o aumento?*

Problema 2 – *Um trabalhador recebe um salário de R$ 500,00 e está defasado em R$ 200,00. Expresse essa defasagem na forma de taxa percentual.*

Problema 3 – *O trabalhador de uma empresa que recebe salário tem direito ao Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS), que é de 8% sobre o salário bruto (salário bruto é o valor total da folha de pagamento). Sabendo que o valor do FGTS que a empresa tem que depositar mensalmente é de R$ 40,00, qual é o valor do salário bruto desse trabalhador?*

A coleta de dados foi realizada no mês de setembro de 2004 e as entrevistas foram totalmente gravadas em áudio e depois transcritas.

Antes da realização das entrevistas com as quatro duplas de alunos, foram informados os objetivos da pesquisa e o método a ser utilizado. Cada

[1] Para obter mais informações sobre tais problemas, sugerimos a leitura de VIZOLLI (2001; 2006). Os procedimentos metodológicos adotados nos estudos I, II e III, estão disponíveis na bibliografia de 2006.

uma das duplas de alunos foi encaminhada pela professora mediadora[2], de acordo com a ordem com que iam concluindo as atividades que estavam sendo desenvolvidas em sala de aula.

Em todas as entrevistas, à medida que os problemas iam sendo propostos, o pesquisador ou mesmo um dos participantes fazia a leitura de cada um, para que fossem esclarecidas possíveis dúvidas quanto ao entendimento dos dados e informações.

Neste trabalho, apresentamos as análises relativas aos registros de representação semiótica utilizados pelos participantes do Estudo IV – ou seja, os registros orais e escritos utilizados pelos participantes de quatro duplas de alunos de 4º Ciclo de Aprendizagem (equivalente a 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental).

ANÁLISE DOS DADOS

Primeira dupla: EPm(22;11) e LAf(35;5)

O pesquisador fez a leitura do problema 1. Passados alguns minutos, os alunos registram, em suas respectivas folhas, as seguintes operações:

EPm(22;11)	**LAf(35;5)**
00,20 *x 30* *00,00* *00,60 –* *006,00*	*18 | 30* *-18 6, 0 0*

Os registros verbais escritos indicam que os participantes buscaram um algoritmo para solucionar o problema. No entanto, eles não dominam as regras de significado e de funcionamento a que se refere Duval (1993). Esses registros são constituídos por números e representam operações fundamentais – neste caso, multiplicação e divisão, respectivamente. Referem-se a **registros de representação semiótica numérico aritméticos**.

Ao ser questionado pelo pesquisador como havia pensado para chegar aos R$ 60,00, LAf(35;5) respondeu: *pegar esse 200 e dividir por 30 pra saber este aumento*. Enquanto o pesquisador dialogava com LAf(35;5), EPm(22;11)

[2] No EJA/Univali, trata-se de um professor que permanece em sala de aula com os alunos. Ele coordena e articula as atividades com os alunos e os professores das diferentes áreas do conhecimento.

acompanhava. Quando o pesquisador referiu-se a ele, ele falou: *eu fiz 200 vezes 30*. Ao ser questionado sobre o valor encontrado, que dizia ter sido 600, e não 6,00 conforme registro da operação matemática efetuada, afirmou que tinha dúvidas, uma vez que 600 é muito alto.

LAf(35;5) voltou a refletir sobre os dados apresentados no enunciado, dizendo: *Se aumento 30%?* Recorreu a 10% de 200, mas a resposta não veio. O pesquisador propôs uma revisão perguntando a EPm(22;11): *O que significa 30%? O que quer dizer 30%?* Mesmo assim, a resposta não veio. O pesquisador insistiu: *Não posso dizer que é 30 de cada 100?* LAf(35;5) entrou na conversa e disse: *Pode, porque é porcentagem*. EPm(22;11) tentou se convencer e falou: *Por 100. Cada 100 pode 30*. Em seguida respondeu: *São 60*. Resposta esta que veio junto com a resposta de LAf(35;5): *60*. As conversas que se seguiram confirmam o que foi dito anteriormente em relação às regras de significado e funcionamento (Duval 1993; 1995) dos registros de representação matemática.

Mais adiante, o pesquisador perguntou: de que maneira podemos *fazer uma conta, para chegar aos R$ 60,00?* Durante os diálogos, os participantes foram compondo os dados e informações e encontraram uma forma de chegar ao resultado. Isso pode ser visto nos trechos das transcrições dos protocolos que seguem.

> *P - Tá. Fala pra mim, como é que você organizaria de cabeça, 30% de 200?*
> *LAf(35;5) - Eu faria assim: 10% né. 10% de 200 eu sei que vai dá 20.*
> *P – OK.*
> *LAf(35;5) - Mais 20%, daria 40, mais 30%, seria 60%. Aí, 10, 10, 10, seria 60, aliás, 20, 20, 20 daria 60.*
> *P - Ok. Então agora escreve o que você falou. Pode ser na forma de conta, ou como você me falou. Do jeito que você consegue escrever o que me falou.*
> *LAf(35;5) Fez as seguintes operações:*

$$\begin{array}{r|l} 200 & 10 \\ \hline 00 & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 200 & 10 \\ \hline 00 & 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 200 & 10 \\ \hline 00 & 20 \end{array}$$

(Em seguida fez a seguinte multiplicação)

20
x 3
60

[...]

P - Ok. Então como é que você faz?

[...]

(Fez a seguinte operações):

30
x 2
60

Nos trechos dos registros verbais, pode-se perceber que LAf(35;5) buscou apoio em 10% para, a partir daí, compor sua resposta, tanto pela via do operador (.2) (10% de 200 é 20; 20% é 40 e 30% , 60) como pela via da soma de parcelas iguais (10%; 10% + 10% = 20% + 10% = 30%; e mesmo 20 + 20 + 20 = 60). É interessante observar que, no **registro numérico aritmético** do cálculo aparece a divisão reiterada de 200 por 10, seguida da multiplicação de 20 por 3. Esta forma de divisão mostra que o participante decompôs o 30 em três partes iguais (10), compondo o resultado a partir da soma dos quocientes.

EPm(22;11) também efetuou um **registro numérico aritmético.** Ao explicar o porquê de sua multiplicação (30 x 2 = 60), informou que o 2 se refere ao 200 e que *são duas vezes 100*. Aqui, a quantidade inicial (200) foi decomposta em duas partes iguais (100 e 100). Como se trata de uma porcentagem (30%), toma-se 30 de cada 100. O participante ainda não conseguiu operar algoritmicamente com a relação entre a taxa percentual e a quantidade inicial, mas dá indícios de que começa a estabelecer uma relação entre a taxa percentual e a centena, o que se constitui num referencial fundamental ao processo de conceitualização.

EPm(22;11) fez a leitura do problema 2. Em seguida, o pesquisador interferiu com a pergunta: *O que o problema diz?* A resposta de LAf(35;5) foi: *que o cara recebe R$ 500,00 e está defasado em R$ 200,00*. EPm(22;11) fala: D*efasado é aumento*. LAf(35;5) discorda e fala: *Não. Defasado é que falta. Ele tinha que receber R$ 700,00*.

Estes registros verbais orais mostram que a mediação se estabeleceu na tríade, o que aconteceu também nos Estudos II e III. Primeiramente, procurou-se compreender o enunciado do problema, para depois iniciar o processo de solução e efetuar o registro matemático. Passada esta fase, EPm(22;11) efetuou a divisão de 500 por 100, obtendo 5 como quociente. LAf(35;5) fez duas operações de divisão (500 : 200), obtendo respectivamente os quocientes 4 e 2. Inconformado com o resultado de tais divisões, dividiu 250 por 50, obtendo 410 como quociente. Ao ser questionado sobre o porquê da divisão de 250 por 50, falou: É que 250 é metade, 50%. Ambos afirmaram que deve ser menos de 50%, uma vez que a defasagem é de R$ 200,00. Tem-se novamente presente a ideia de estimativa.

Os registros verbais escritos dos participantes quando da operação de divisão podem ser vistos como **registros de representação semiótica numérico aritméticos**, porque são constituídos por números.

O pesquisador retomou a divisão efetuada por EPm(22;11) e perguntou o que significava o 5. Ambos responderam que se referia a R$ 5,00. O pesquisador perguntou: *Em termos de porcentagem?* EPm(22;11) disse que é 1%. O pesquisador perguntou: *E 100% é quanto?* LAf(35;5) respondeu: *É tudo.* Em seguida fez o seguinte registro verbal escrito.

500 100%
250 → 50%
500 |100
5

Temos um **registro de representação semiótica numérico**, no qual o participante utilizou o referencial *metade*.

EPm(22;11) acompanhou o raciocínio de LAf(35;5) e disse: *Tem que ser menos de 50%. Então é 40.* Passou a efetuar operações de divisão (500: 40; 500 : 45); em seguida efetuou a multiplicação 40 . 5 = 200, e falou: *Achei. É 40.* Estes registros verbais escritos indicam que o participante sabe que, ao se tratar de porcentagem, as operações de multiplicação e divisão entram em cena, mas este saber ainda é insuficiente.

O pesquisador fez a leitura do problema 3. No intuito de verificar se os participantes compreenderam o enunciado, começou a fazer perguntas. As respostas indicam que o compreenderam.

Os participantes olharam (como quem lê novamente o problema) e registraram as seguintes operações aritméticas:

EPm(22;11)	**LAf(35;5)**
40	*40*
x 8%	*x 8*
320	*320*
320 | 8	
00 40	*Tá muito difícil.*
Esse aqui pegou.	

Trata-se, nos termos de Duval (1993), de **registros de representação semiótica numérico aritméticos**.

Os diálogos que seguiram sugerem que os participantes tomaram consciência de que o resultado encontrado não condizia com o salário do trabalhador; tanto é que acabaram dizendo que o valor encontrado é muito pouco.

O pesquisador continuou instigando por meio de perguntas, tais como: *O que significa 8%? 8% não é equivalente a R$ 40,00?* As respostas a estas perguntas são pertinentes, mas não suficientemente esclarecedoras, tanto pelos registros verbais escritos como pelos registros verbais orais. Dando continuidade, o pesquisador remeteu os participantes aos problemas 1 e 2 (já solucionados).

Os diálogos com os participantes nos levam a afirmar que eles respondem adequadamente à pergunta do problema quando conseguem estabelecer as relações entre as partes absolutas e relativas com os todos absolutos e relativos. A resposta foi encontrada a partir das composições entre os valores já obtidos e registrados na **tabela de números proporcionais**, procedimento este já utilizado na solução do problema 2.

Segunda dupla: GAm(54;0) e STf(45;8)

STf(45;8) fez a leitura do problema 1. Enquanto o pesquisador conversava com STf(45;8), GAm(54;0) respondeu que seria R$ 60,00. STf(45;8) concordou com a resposta de GAm(54;0).

Ao ser questionado sobre o que fez para chegar a tal resultado, GAm(54;0) respondeu: *Na prática. Assim, 200, se fosse 10, seria 20. Como é 30, 3 vezes, seria 60.* STf(45;8) participou da conversa e falou: *Eu faço 3 vezes 2.* Ao ser questionado sobre o porquê de 3 vezes 2, uma vez que se trata de 200 e 30, este participante deu a seguinte explicação: *Porque 1 inteiro é 20. Uma parte inteira*. O 1 inteiro aqui não se refere à quantidade inicial 200, mas sim a 10%. Isso pode ser visto mais adiante, durante os diálogos entre o pesquisador e os participantes. O 20 é o valor relativo a este 10.

Ao solicitar que registrassem o que haviam falado, GAm(54;0) disse que não sabia fazer, enquanto STf(45;8) fez o seguinte registro verbal escrito, o qual pode ser visto como um **registro de representação semiótica numérico aritmético**:

200,00
x 30
60,00

O resultado da operação condiz com a resposta da pergunta do problema, no entanto não condiz com o resultado da operação efetuada. Parece-nos que se trata do que Duval (2003, p. 31) chama de "representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas".

STf(45;8) fez a leitura do problema 3, no entanto não o interpretou corretamente, o que pode ser percebido em sua fala: *Ele pede que eu veja, de 40, eu tenho que achar o valor que saiu R$ 800,00. 8%*. Nos diálogos que seguem, GAm(54;0) se manifesta com coerência quanto à compreensão, no entanto não consegue efetuar um registro de representação que possibilitasse chegar a uma reposta para o problema. *Mensalmente, a empresa tem que depositar para seu funcionário 40.* As conversas prosseguiam e STf(45;8) efetuou o seguinte registro verbal escrito:

```
  40        320 | 8
 x 8        32    40,00
 320        00
```

Seguindo o raciocínio do problema anterior, este participante falou e organizou um **registro de representação semiótica na forma de tabela de números proporcionais.**

Acompanhando os registros verbais, GAm(54;0), que já havia percebido que 8% significa R$ 40,00 e que a pergunta se referia ao salário, fez o seguinte registro verbal escrito:

```
100  -  8  =  92
100  -  8  =  92
100  -  8  =  92
100  -  8  =  92
100  -  8  =  92
       40    460
            + 40
             500
```

Este registro indica que o participante buscou apoio na quantidade inicial 100 –reiteradamente, tirou 8 de cada 100, de forma a obter os 40. Este participante lançou mão, ao mesmo tempo, da composição e da decomposição dos valores numéricos.

Mais uma vez, STf(45;8) fez a leitura do problema: agora, o problema 2. As falas deste participante indicam que ele compreendeu o enunciado, enquanto GAm(54;0) apenas acompanhava os diálogos. STf(45;8) foi pensando e, ao mesmo tempo, falando:

Se 500. Vamos fazer por mil inteiro. 1.000 inteiro. Vamos supor 10%, que seria igual a 100. 100 mais 500 é igual a 50. (Foi efetuando o registro na forma de tabela, conforme consta a seguir). 5 x 2 10. Ele deixou de receber na verdade, 500 divido por 10 dá 50. 250 daria 50% do salário dele. Então, ele deixou de receber, na verdade, se fosse 100. Se fosse 100%, igual a 500. 50%, é igual 250, tá. Então vamos tirar esse 50 aqui. 25%. Quanto que é 10% de 50? É R$ 5,00. 5. Vamos ver se vai bater isso aqui? Vezes, tem que dar 200 ou a divisão desse tem que dar 500, ou vezes, tem que dar 500. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 100. Dá 250. R$ 250,00 (foi contando nos dedos). 50%. Só que tem que ser 200, que seria.

Tirando 50.
1000 10% = 100 : 2 500
500 10% = 50
50 10% = 50
500 |100 = 500
x 5,0 = 2,50,00

GAm(54;0) acompanhou o raciocínio de STf(45;8) e contribuiu fornecendo os resultados das operações mencionadas. É interessante observar que STf(45;8) tomou como apoio outros valores, neste caso, 1.000 e 10%; e metade. Fez o registro de uma letra, que possivelmente se refere a um valor desconhecido (incógnita). Para este participante, o referencial metade é bastante forte; tanto é que aparece novamente no registro verbal escrito, mais especificamente na passagem de 1.000 para 500.

O valor 1.000 refere-se ao todo, sobre o qual o participante buscou o valor correspondente a 10%, ou seja, 100. Este todo é divido em duas partes iguais (500), que passam a ser o novo todo, do qual o participante encontrou 10%, ou seja, 50. O todo 500 é transformado em 50. Sobre o 50, o participante buscou encontrar 10%, o que corresponde a 5, mas escreveu 50.

Este participante utilizou o **registro de representação semiótica numérico aritmético organizado na forma de tabela de números proporcionais.** Também fez uso da incógnita "x".

Terceira dupla: SCf(54;11) e ELm(37;11)

Inicialmente, o pesquisador orientou os participantes a preencherem os dados e solucionarem os problemas. Em seguida, fez a leitura do problema. Logo após a leitura ELm(37;11), fez os seguintes registros verbais e escritos:

Qual seria o aumento. Então seria. Daí temos que pegar, pra fazer 1%, temos que pegar 200 e dividir por 100. Duzentos, daí não precisa botar os reais porque nós vamos fazer a divisão. Cento.

200 |100
2 = 1%
x 3
60,00

O aumento seria de R$ 60,00.

(Foi falando enquanto escrevia a resposta) Aqui nós podemos cortar os dois zeros, que fica 2%. Pra saber o trinta, fazemos vezes 3. 3 x 2, 6.).

O registro verbal escrito, no qual aparece a operação de divisão, se trata de um **registro de representação semiótica numérico aritmético**, a partir do qual o participante buscou encontrar o valor correspondente a 1%, ou seja, a taxa percentual unitária. SCf(54;11) acompanhou os registros verbais e escritos de ELm(37;11) e em seguida fez o seguinte registro:

200 : 100 = 2,00
3 x 2 = 60,00
O aumento foi de R$ 60,00.

O fato de os dois participantes efetuarem a divisão de 200 por 100 é um forte indício de que eles estabeleceram a relação da porcentagem com a centena. Podemos também dizer, nos termos de Damm (1998), que eles fizeram a avaliação da quantidade inicial (200) com a centena. É essa avaliação que caracteriza a porcentagem.

O fato de terem encontrado o valor correspondente a 1% demonstra que estes participantes fizeram uso de uma estratégia típica do processo de escolarização. Em diferentes momentos das entrevistas, os participantes mencionaram e fizeram uso do valor correspondente a 1%. Isto apareceu na entrevista realizada com os professores e com os participantes da segunda dupla deste estudo. Os registros verbais orais dão indícios de que se trata mais de um algoritmo do que do resultado da compreensão. Podemos dizer que se trata de reforçar o que foi aprendido durante o processo de escolarização, ou seja, são as reminiscências escolares de que nos fala Fonseca (2001, 2002).

SCf(54;11) fez a leitura do problema 2. Em seguida falou: *ele recebe R$ 500,00 e está defasado em R$ 200,00*. Seguiram-se os diálogos entre o pesquisador e os participantes e este participante fez a pergunta: *O 100%?* Ele mesmo respondeu: é o 500. A partir disso, ELm(37;11) afirmou que é *20%*.

SCf(54;11) acompanhou o raciocínio utilizado por ELm(37;11) e efetuou o seguinte registro verbal escrito: *500,00 = 500 : 100 = 5,00 = 1%* . Em seguida falou: *Dividindo 500 por 100 dá 5*.

O registro mostra que este participante dividiu o todo absoluto (500 – quantidade inicial) pelo todo relativo (100% - taxa percentual), obtendo o valor correspondente a 1%, ou seja, 5. Temos um **registro de representação semiótica numérico**.

As conversas prosseguiram e ELm(37;11) refez seu cálculo, efetuando o seguinte registro verbal escrito:

500 |100
5 1% de 500.

Aqui o participante explicitou que 1% é equivalente a R$ 5,00.

Os diálogos continuaram e novos registros foram efetuados. Acompanhando os diálogos, é possível perceber que ELm(37;11) reconheceu que a defasagem era de 40%, tanto é que procurou uma operação para a qual conhece o algoritmo, falando o seguinte: *Porque aqui é 5. R$ 5,00, daí eu faço 5 x 4, vai dar o 200*. Em seguida, reconheceu que 200 não é o produto entre 5 e 4 e disse que este é 40.

A divisão efetuada por SCf(54;11) (200 : 5 = 40) passou a confirmar a resposta já obtida por ELm(37;11). O algoritmo da operação de divisão justificou o que os participantes procuravam: uma operação com os números do enunciado do problema e que resultasse em 40. A busca do algoritmo também pode ser vista como reminiscência da matemática escolar, de que trata Fonseca (2001, 2002).

Na sequência dos diálogos, e a partir do valor correspondente à unidade percentual, os participantes organizaram tabelas que expressam igualdades. Trata-se de **registros numéricos na forma de tabela de números proporcionais**.

O pesquisador fez a leitura do problema 3. As conversas dos participantes indicaram que eles compreenderam o enunciado do problema. Ambos partiram para o registro dos cálculos. Novamente, buscaram encontrar o valor correspondente a 1%, conforme pode ser visto no recorte do protocolo a seguir.

Participante SCf(54;11)

Tem que dividir os 40 por 8.

40 | 8
40   5 = 1%
00
5 x 100 = 500,00.

Participante ELm(37;11)

8
x 10
80% = 400,00
20% = 100,00
500,00

400 | 80
5 = 1%
x 20
100

400 | 100
4
x 2
8

A partir da relação de equivalência 8% = R$ 40,00, SCf(54;11) efetuou a divisão (40 : 8 = 5) encontrando assim o valor equivalente a 1%. O produto do quociente 5 pelo todo relativo (100%) permitiu que este participante encontrasse o resultado, da seguinte forma: *5 x 100 = 500,00*. ELm(37;11) multiplicou 8 por 10, obtendo 80%, o que é equivalente a R$ 400,00. Para isso, fez uso do operador produto ou coeficiente de proporcionalidade (10). O equivalente aos 20% restantes só foi conseguido a partir dos diálogos e das orientações do pesquisador. Dividiu-se 400 por 80, obtendo 5 (equivalente a 1%) e multiplicou-se o resultado por 20, obtendo então valor de R$ 100,00, que adicionado aos R$ 400,00, perfazendo os 100% do salário, que corresponde a R$ 500,00.

Os registros verbais orais e escritos dessa dupla de alunos dão indícios de que estão familiarizados com os registros de representação semiótica e com os procedimentos difundidos pelo processo de escolarização, embora ainda não possuam amplo domínio das regras de significado e funcionamento (Duval 1993; 1995) da escrita matemática. Além dos registros de representação numérico aritméticos, bastante presentes nos três estudos realizados (com mais destaque entre os estudos com os alunos), esta dupla lançou mão de **registros de representação semiótica na forma de fração**.

Quarta dupla: AAf(38;4) e EFf(25;8)

O pesquisador fez a leitura do problema 1. Em seguida, perguntou: *o que significa 30%?* EFf(25;8) falou:

Fosse 10%, daria 20. [...] Fosse 20%, daria 40; fosse 30%, 60. [...] O negócio é a montagem. Eu faço isso de cabeça.

Ao ser orientado a escrever do jeito que falou, este participante fez o seguinte registro verbal escrito:

Se fosse 10% daria R$ 20,00
20% " R$ 40,00
30% " R$ 60,00

Tanto no registro verbal oral quanto no registro verbal escrito (**registro numérico de números proporcionais**) de EFf(25;8) percebemos a utilização da estratégia escalar. Nos momentos que se seguiram, os participantes dialogaram entre si. Em suas conversas, AAf(38;4) falou que EFf(25;8) usou a lógica, mencionou que seria interessante encontrar 1% para depois somar. Trata-se da busca de apoio nas orientações passadas pelo professor de matemática em sala de aula – ou ainda, novamente nas palavras de Fonseca (2001, 2002), trata-se das reminiscências escolares.

AAf(38;4) fez a leitura do problema 2. EFf(25;8) retomou a ideia do equivalente a 1%. AAf(38;4) lembrou-se do problema do avião (problema trabalhado em sala de aula). Estes são os pontos de apoio que os participantes buscaram para encontrar a resposta ao problema em questão. O que estamos falando pode ser visto no recorte do protocolo, a seguir.

O registro efetuado por AAf(38;4) mostra que este participante estabeleceu uma relação de correspondência entre 100, 20% e 40%. Pela via da composição, organizou os dados e chegou ao todo absoluto (500) e ao todo relativo (100%), concluindo que 500 = 100%, assim como 200 = 40%. O registro verbal escrito e os registros verbais orais deste participante permitiram este entendimento. Temos aqui o **registro de representação na forma de tabela de números proporcionais**.

Pesquisador	**Participante AAf(38;4)**	**Participante EFf(25;8)**
	Tá. Então seria. Pegaria os 500 daqui, que é o 100%, e dividiria pelo que eu. É isso será? Pelo que eu tenho que é 200%.	
Se 500 é 100%, porque você quer dividir por 200?		
	Porque eu estava fazendo a lógica daquele de dividir por 100.	*Mas não dá.*
	Não. Este aqui dá o valor total e aquele não dava, daí inverte. *Partindo do princípio que ele disse de que essa porcentagem é tirada por 100, então vamos ver quantas vezes nós vamos ter que tirar. Seria. Vamos ver se eu consigo fazer isso, vamos ver se eu entendi aquilo que ele tinha falado. Vamos ver!* *(Registrou o seguinte, enquanto falava):* *5 x 20 5 x 40* *100 _____ 20% _______40%* *100 _____ 20% _______40%* *100 _____ 20% _______40%* *100 _____ 20% _______40%* *100 _____ 20% _______40%* *500 = 100% 10% 200 = 40%*	

De maneira muito breve, podemos dizer que os participantes desta pesquisa buscaram apoio em vivências escolares, ou ainda em valores ou quantidades que lhes fossem mais acessíveis, como metade, 50%, 10%, dobro, entre outros; eles fizeram uso de registros de representação semiótica numérico, principalmente aritméticos.

O DESVELAR DOS RESULTADOS

Os registros verbais orais e escritos dos participantes do Estudo IV, assim como dos participantes dos Estudos I, II e III, indicam a busca de apoio em situações socioculturais e escolares. Isto é, para solucionar os problemas propostos, os participantes procuraram estabelecer relação entre os dados e as informações presentes nos enunciados dos problemas com quantidades ou taxas percentuais que lhes fossem mais acessíveis.

No que concerne aos registros de representação semiótica (Duval 1993; 1995; 2003), os participantes deste estudo fizeram uso, principalmente, de registros de representação semiótica numéricos, com destaque para os registros aritméticos e para a tabela de números proporcionais. O registro numérico na forma de tabela de números proporcionais foi utilizado pelas duplas de alunos nos quatro estudos, o que nos levou a acreditar que estes participantes percebem que existe uma relação entre as quantidades e as variáveis presentes no enunciado. Diferentemente dos Estudos I e II, no Estudo IV foram encontrados registros escritos em que a incógnita foi representada por uma letra de nosso alfabeto (x), o que pode ser visto no registro escrito (registro de representação semiótica na forma de tabela de números proporcionais) da solução do problema 2. Isso denota que o processo de escolarização amplia a gama de conhecimentos dos alunos, permitindo que eles passem a utilizar registros de representação semiótica mais elaborados, como, por exemplo, registros algébricos na forma de equação ou função.

Esses resultados apontam para a necessidade de o professor propor situações que levem os alunos a efetuar as devidas conversões, coordenando as transformações entre os sistemas de registros de representação semiótica.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Quando da elaboração da dissertação de mestrado (VIZOLLI, 2001), identificamos os registros em língua natural, numéricos (aritmético, fracionário, decimal, percentual), tabela com números proporcionais, geométricos e gráficos cartesiano. Ao aprofundar os estudos sobre registros de representação semiótica (VIZOLLI, 2006) identificamos ainda os registros algébricos na forma de equação e função.

Percebemos que os alunos fizeram uso principalmente de registros de representação semiótica mistos (combinação de linguagem natural escrita e números) e de registros numérico aritméticos. Quando instigados ou orientados fizeram uso da tabela de números proporcionais. Nesse sentido, uma das tarefas do professor é considerar que um enunciado pode auxiliar ou não o aluno no processo de compreensão conceitual, daí a necessidade da utilização

de vários registros de representação para um mesmo objeto matemático, além da subsequente conversão entre eles. No processo de conversão é importante que se dê atenção à coordenação, porque é na passagem de um registro de representação para outro que podemos identificar os conhecimentos mobilizados no processo de solução.

Em algumas ocasiões os registros de representação utilizados pelos participantes não foram suficientes para esclarecer os conhecimentos mobilizados, principalmente quando se tratava de representações semióticas já internalizadas. Neste caso, o registro verbal oral forneceu elementos que nos permitiram saber um pouco mais sobre a forma como os participantes pensavam para solucionar o problema e a compreensão que demonstraram sobre o registro efetuado. Isso nos levou a considerar a fala como um instrumento de mediação entre o participante e o pesquisador, entre os participantes e o registro por ele utilizado e entre o pesquisador e o registro efetuado pelo participante. Por meio da fala, os participantes foram levados a pensar sobre o pensado, falar sobre o pensado, pensar e falar sobre o registrado. O pesquisador foi levado a analisar o registrado e o falado, inferindo posteriormente sobre o pensamento do participante. Esta situação deveria ser uma prática permanente no processo de ensino e aprendizagem.

Durante o processo de solução dos problemas ficou patente, principalmente com os alunos, o uso de registros numérico aritméticos com tratamentos inerentes às operações fundamentais. Para os alunos, o uso da regra de três, assim como o costume de encontrar o valor correspondente à unidade percentual, não passava de uma forma ou método para solucionar os problemas. Dificilmente eles conseguiam estabelecer as devidas relações entre as quantidades e a taxa percentual, isto é, reconhecer a proporção.

Os resultados da pesquisa confirmam a hipótese de que escutar as falas, notações ou registros de representação efetuados por alunos e professores pode nos auxiliar a compreender como os participantes articulam os dados e as informações de modo a solucionar os problemas de matemática que lhes são propostos em sala de aula, o que pode nos permitir uma aproximação contínua entre o ensino e a aprendizagem.

Considerando esse processo como um todo, estamos convictos de que precisamos de novos estudos, novas reflexões e novas pesquisas para darmos mais coerência e consistência ao fazer pedagógico de sala de aula, especialmente na EM e na EJA.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In : MACHADO, S. A. D. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: SP, Papirus, 2003. p. 125-148.

BITTAR, M. O ensino de vetores e os registros de representação semiótica. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 71-94.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W. e SCHLIEMANN, A. D. Matemática escrita versus matemática oral. In: CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. 2. ed. São Paulo: Cortez, (1988). p. 45-67.

CARVALHO, D. L de. **A interação entre o conhecimento matemático da prática e o escolar**. 1995. Tese (Doutorado) – UNICAMP, Campinas, 1995.

DAMM, R F. **Apprentissage des prblèmes additifs et compréhesion de texte**. 1992. Tese (Doutorado) – ULP, Stradbourg, 1992.

______. Registros de representação. In : MACHADO, S. A. D. (Org.). **Educação matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 135-154.

______. Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 35-48.

DAMM W. L. Les problemes de pourcentage: une application des problèmes de conversion proportion-quantité. 1998. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM, 6, p. 197-212.

DUARTE, N. **A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar**. 1987. (Dissertação de Mestrado) – UFSCar, São Carlos, 1987.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnements cognitif de la pensée. In: **Annales de didactique et Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM-ULP, 1993, v. 5, p. 37-65.

_______. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Bern, Berlin, Frankfurt, New York, Paris, Wien: Peter Lang, editions scientifiques européennes, 1995.

_______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. A. D. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. pp. 11-34.

FONSECA, M. da C. F. R. **Discurso, memória e inclusão**: reminiscências da matemática escolar de alunos adultos do ensino fundamental. 2001. (Tese de doutorado) – UNICAMP, Campinas, 2001.

_______. **Educação matemática de jovens e adultos:** especificidades, desafios e contribuições. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

MARANHÃO, M. C. S. A.; IGLIORI, S. B. C. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 57-70.

NEHRING, C. M. **Compreensão de texto: Enunciados de problemas multiplicativos elementares de combinatória**. 2001. Tese (Doutorado em Educação) – UFSC, Florianópolis, 2001.

VIZOLLI, I. **Registro de representação semiótica no estudo de porcentagem**. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) – UFSC, Florianópolis, 2001.

VIZOLLI, I. **Registros de alunos e professores de Educação de Jovens e adultos na solução de problemas de proporção-porcentagem**. Tese (Doutorado em Educação) – UFPR, Curitiba, 2006.

CAPÍTULO 05

LEITURA, ESCRITA E ARGUMENTAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO: POSSIBILIDADES DE CONSTITUIÇÃO DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS

Samuel Edmundo López Bello
Luis Davi Mazzei

Saber matemática não é apenas dominar os algoritmos necessários à solução de problemas. Muito mais do que aprender de técnica para operar com símbolos, a matemática relaciona-se com certas possibilidades de interpretar, analisar, sintetizar, significar, conceber, transcender o imediatamente sensível, extrapolando e projetando perspectivas.

A utilização da linguagem matemática deve priorizar a compreensão dos conceitos que estão sendo tratados e deixar claro em que contextos estão inseridos. Para Danyluk (2002, p. 18): "a leitura, quando é compreensão e interpretação, abre para o leitor novas possibilidades de compreensão de si, do outro e do mundo". Portanto, é mister do professor empregar a linguagem materna (comum) de maneira a permitir aos alunos o estabelecimento de relações entre essa e a linguagem matemática e vice-versa.

Porém, qual a nossa intenção ao situar as questões relativas à leitura e escrita em matemática, relacionando-a à língua materna e provocando a produção de si, do outro e do mundo?

Neste texto, tentaremos discutir e explorar algumas possibilidades de como a leitura, a escrita e a argumentação na prática pedagógica em matemática podem contribuir à compreensão e constituição de significados próprios

do seu campo discursivo[1]. Em um contexto educacional contemporâneo, em que as teorizações estão pautadas por discussões em torno da linguagem, suas significações sociais e seus efeitos em processos de subjetivação[2], consideramos de extrema importância trazer essas discussões para o âmbito da educação matemática no ensino médio.

Assim, a relação matemática e linguagem, e em particular, os processos de leitura e escrita, devem ser encarados como formas imbricadas de representação de diferentes realidades e não apenas de uma única possível. Especulamos que esta seja uma questão até agora ignorada pela maioria de nós professores e que tem produzido dificuldades nos alunos nas nossas aulas de matemática.

É importante lembrar, também, as dissonâncias que podem acontecer entre a oralidade do dia a dia (marcada principalmente pelo uso da língua materna) e as formas orais argumentativas e o vocabulário presente na produção do discurso matemático. É preciso que os próprios alunos se deem conta dessas dissonâncias, uma vez que dessa percepção derivam suas possibilidades de constituição permanente de diferentes significados. Entendemos que esta perspectiva se aproxima da ideia de se reinterpretar essa tal oralidade presente na escola e que significa muito mais do que utilizar o que o aluno fala para a compreensão da matemática. Trata-se de pôr em exercício a prática argumentativa como uma forma de pensar, entre outras, que aproxima o aluno da prática e do campo discursivo da matemática, enquanto disciplina e orienta formas de produção de si, do outro e do mundo.

O LÉXICO ESPECIALIZADO - O MUNDO LIDO SOB A PERSPECTIVA MATEMÁTICA

As palavras estão na fronteira entre os sujeitos envolvidos no processo de comunicação, de forma que nenhum dos sujeitos domina totalmente os

[1] Discurso, no contexto deste trabalho e em um sentido foucaultiano, refere-se ao conjunto de expressões verbais identificadas com certas instituições ou situações sociais, como por exemplo o discurso da ciência, o discurso da matemática, o discurso da sala de aula (SILVA, 2000, p. 43). Ao falarmos do campo discursivo da matemática e da educação matemática nos referiremos, todavia, aos efeitos sociais que produzem os saberes advindos dessas áreas de conhecimento como formas particulares de discurso.

[2] Subjetivação como sentido e criação de subjetividade refere-se propriedades e elementos que caracterizam o ser humano como sujeito. No contexto deste texto, ainda, sujeito será entendido como efeito do discurso e do poder e não mais como aquele de natureza centrada, racional e autônoma do modo como apresentado, particularmente, pelas pedagogias críticas, construtivistas e libertadoras.

significados da palavra. Cada sujeito domina, possui, talvez, uma parte do sentido da palavra, que somente se completa na relação com o outro. Dessa forma, a palavra se orienta em função e em relação a um interlocutor. Poderíamos lembrar Bakhtin (1995, p. 33) quando diz:

> Na realidade toda a palavra comporta duas faces. Ela é determinada tanto pelo fato de que procede de alguém, como pelo fato de que se dirige para alguém. Ela constitui justamente o produto de interação do locutor e do ouvinte. Toda a palavra serve de expressão a um em relação ao outro. [...] A palavra é uma espécie de ponte lançada entre mim e os outros. Se ela se apoia sobre mim numa extremidade, na outra apoia-se sobre o meu interlocutor. A palavra é o território comum do locutor e do interlocutor.

A compreensão necessita, portanto, que os signos e palavras empregadas sejam acessíveis aos sujeitos envolvidos, que todos tenham a possibilidade de fazer a aproximação entre os signos empregados e os já conhecidos. Fica claro, assim, que o emprego da linguagem deve ser feito de maneira pensada, com intencionalidade, uma vez que cada palavra, cada signo traz em si, não somente um, mas diversos significados.

Há uma grande variedade de termos originais da língua materna que são empregados de forma técnica na matemática (língua de especialidade). Da mesma forma, há um grande número de palavras que são originais da matemática e que são utilizadas na linguagem comum (por exemplo: ver as coisas por um outro ângulo). Esse fato de as palavras terem significações diferentes, de acordo com o contexto em que são utilizadas, deve ser explorado com os alunos, uma vez que nem sempre essas alterações no sentido são óbvias.

Segundo Lerat (1997, p. 15) "Uma língua é um sistema de signos orais e /ou escritos vinculados a uma história e a uma cultura"[3]. A partir desse conceito, podemos inferir que o domínio da língua surge como um requisito essencial para a prática docente. De acordo com Lerat (1997, p. 18)

> A língua especializada é antes de tudo uma língua em situação de emprego profissional, quer dizer, "uma língua em especialidade" como dizia a escola de Praga. É a língua mesma como um sistema autônomo, mas a serviço de uma função mais ampla: a transmissão de conhecimento.[4]

[3] Tradução dos autores.

[4] Tradução dos autores.

Algumas pesquisas, como as de Mazzei (2004), apontam para o fato de que os alunos não possuem o domínio do léxico específico empregado nas aulas de matemática. Esse fato pode estar relacionado com o emprego de uma linguagem especializada como a linguagem matemática, por vezes sem nenhuma vinculação com a realidade ou cotidiano na qual estão inseridos os alunos e o professor.

Assim, é imprescindível ao professor de matemática, o uso da linguagem comum para a construção dos conceitos junto com seus alunos. Assim, o professor deve levar em consideração a influência que a sua linguagem tem no processo de interação com os alunos. Machado (1998, p. 95) coloca:

> [...] concebendo cada signo como uma entidade de duas faces, inseparáveis como uma moeda – o conceito e a imagem -, ou, em outras palavras, respectivamente, o significado e o significante, a verdadeira questão por responder, é a das relações que se estabelecem entre o signo, indivisível, e a realidade que ele representa.

Um aspecto que também devemos levar em consideração refere-se à ambiguidade, no sentido de multiplicidade, que esse discurso matemático pode oferecer. Hariki (1992, p. 100, grifo nosso) destaca esse aspecto ao apontar:

> Para falar e escrever a língua matemática é necessário estabelecer relações ou correspondências entre objetos matemáticos, nomes e símbolos. O discurso matemático é assim tecido por meio de duas linguagens em certo modo antagônicas: a linguagem ordinária, com a sobrecarga de conotações e riquezas de detalhes, e a outra, a linguagem simbólica, com todo seu **poder** de síntese.

Assim, aponta esse autor, o caso da palavra zero. Por exemplo, o número 1 é um zero no polinômio X^{2-1}, mas o número zero não é um zero neste mesmo polinômio. Da mesma forma, podemos enquadrar o caso da palavra linear. A função y=x+1 é, para alguns, uma função linear, no sentido de seu gráfico ser uma reta e não como na álgebra linear que denota a preservação da estrutura vetorial de uma função. Para evitar essa ambiguidade alguns autores preferem chamar a tal função de linear afim, ou função afim, ou ainda função de primeiro grau. Algo parecido acontece com a palavra grupo, a qual em matemática deverá ser usada, no seu sentido algébrico, ao se falar em estruturas como os tais grupos comutativos ou abelianos, porém nunca como ideia de

conjunto, coleção, classe ou família. A isto se soma a babelização[5] de termos matemáticos como consequência da valorização da sua produção acadêmica acontecida nos países do ocidente europeu. Assim, na língua portuguesa se aceita ou pelo menos se adapta a nomenclatura vinda de outras línguas como o inglês, o francês, o alemão e ainda do grego.

Muitas vezes, também, nos depararmos com um texto escrito, de qualquer área do conhecimento, passamos os olhos e, não raro, não o compreendemos. Por quê?

Nas escolas, o uso da linguagem é repleto de regras não usuais na linguagem que empregamos no dia a dia. E nesse sentido o saber acadêmico tem sua própria linguagem. Podemos em alguns casos até decodificar os símbolos impressos, mas não somos capazes de realizar a leitura do texto. Ler significa entender o significado do que está sendo dito.

A linguagem acadêmica produz algumas regras que para se diferenciar da linguagem comum e as mesmas variam muito entre as diversas áreas e disciplinas. A linguagem empregada em biologia é bastante distinta da empregada em física, por exemplo. Isso faz com que uma pessoa, um físico por exemplo, ao ler um texto de biologia, não seja capaz de compreendê-lo totalmente. Por quê? Porque a linguagem acadêmica se vale de uma terminologia específica, que só se relaciona com sua área de especialidade. O emprego de uma terminologia própria é uma das características da linguagem acadêmica. O uso dessa terminologia específica a uma área, entretanto, acarreta alguns problemas, quais sejam: a polissemia dos vocábulos e a consequente exclusão dos sujeitos que não apresentam o domínio do significado específico do termo. Feyerabend (2001, p. 35) expressa essa situação ao se referir que os matemáticos: "[...] utilizam muitas vezes num sentido técnico, palavras comuns e nem sempre fica claro de que sentido se trata".

Hariki (1992, p. 102) também trata desse assunto ao falar do problema da ambiguidade da simbolização.

[5] A referência à babelização que apontamos também se refere, no sentido assumido por Larrosa (p. 69-72), a possibilidade de pluralidade e variação entre línguas quase infinita, segundo momentos históricos, contextos de uso, estados de confusão e de dispersão.

> A história do descobrimento ou da criação dos objetos matemáticos é uma das responsáveis por essa proliferação de símbolos. Cada matemático pensa que seu símbolo é melhor que o do outro. Observe-se que a discussão entre Newton e Leibniz só representou um atraso para a matemática na Inglaterra. Em que sentido um símbolo pode ser melhor que outro?[6]

Assim, voltando ao caso do nosso zero, o mesmo pode significar o próprio número zero, pode ser utilizado para marcar um ponto de referência, representar um vetor nulo, uma transformação nula, uma matriz nula. Da mesma forma o símbolo “+” pode ser usado para adição de números, adição de funções, adição de vetores, reunião de conjuntos, entre outros.

Como vemos, o problema da simbolização se constitui a partir da tensão entre a vontade de matemática de precisão na síntese do pensamento e a claridade de poder representar os diferentes objetos matemáticos produzidos para cada ideia ou conceito.

Caberia se perguntar: que fazer diante desta situação? Escolher um para uso e citar os outros? Escolher um e só um para não confundir os alunos? Será que assim como babelizada a linguagem precisamos babelizar o pensamento?

Gostaríamos de concluir esta seção parafraseando Larrosa (2004, p. 82-83) com ideias que nos fazem pensar: diante desse babelismo generalizado, começa a apontar um pensamento da diferença não mediada. Um pensamento mais heterológico que dialógico, mais babelizante que antibabelizante, um pensamento que não tenha a ver com a dificuldade da mediação, mas com a responsabilidade de diferença e com a diferença. Um convite que não seja pensar a língua a pesar de babel, mas uma comunidade realmente plural, uma comunidade realmente babélica, um aprender a habitar babel babelicamente, afirmando e não negando a condição babélica de todo o humano.

[6] Esta discussão referia-se à utilização de certos símbolos para representar certas operações a serem efetuadas no cálculo infinitesimal.

PENSANDO PRÁTICAS DE LEITURA E ESCRITA EM MATEMÁTICA: UMA POSSIBILIDADE DE INTERPRETAÇÃO, ARGUMENTAÇÃO, DE PRODUÇÃO DE SI, DO OUTRO E DO MUNDO

Um aspecto a ser destacado, e que é muito bem apontado por Suassuna (1997), em seu artigo "para além do linguístico: a produção escrita na escola", refere-se ao funcionamento do discurso pedagógico no qual o aluno escreve com a finalidade de devolver e reproduzir um discurso esperado pelo professor em torno de certos conteúdos. Essa perspectiva, ainda muito presente na prática pedagógica escolar, o afasta da nossa intenção primeira de tornar a leitura e escrita uma forma de produção de si, em primeiro lugar. No que se refere à matemática, ele acaba reproduzindo apenas aquilo que o professor autoriza e lhe nega a possibilidade da produção/formulação de outras possibilidades, também matemáticas, que lhe abram perspectivas de pensamento, as quais devem perpassar, a nosso ver, por questões de caráter ético-cultural e, ainda, político, produzindo o outro e o mundo.

Sob a ótica da etnomatemática, como uma das propostas e discursos (BELLO, 2006) para se pensar a educação matemática na educação básica, muito tem se problematizado em torno da produção de saberes sobre um viés político-cultural.

Nesse sentido, entendemos que possibilidades de leitura e escrita matemática podem ser organizadas por nós, em caráter provisório, sob alguns pontos que consideramos centrais:

> 1 - entender as narrativas em torno do sentido/presença do discurso matemático na vida dos nossos alunos;
> 2 - problematizar os significados matemáticos presentes dentro e fora da escola, discutindo por que uns são mais valorizados do que outros;
> 3 - constituir o processo de leitura e escrita um processo de criação e socialização cultural;
> 4 - identificar aspectos realmente significativos na formação matemática dos estudantes.

Pode se perceber que, em nenhum dos aspectos anteriormente mencionados, deixa-se o discurso matemático longe das nossas considerações. Muito pelo contrário, ele passa a fazer parte do "tecido" constituído pelas narrativas em torno de sentidos, de significados dentro e fora da escola e a ser entendido

como uma das ferramentas na formação escolar e social. Isto porque o discurso é possibilidade tanto do mundo de coisas quanto da constituição de um falante singular ou de uma comunidade de falantes.(LARROSA, 2002, p. 66).

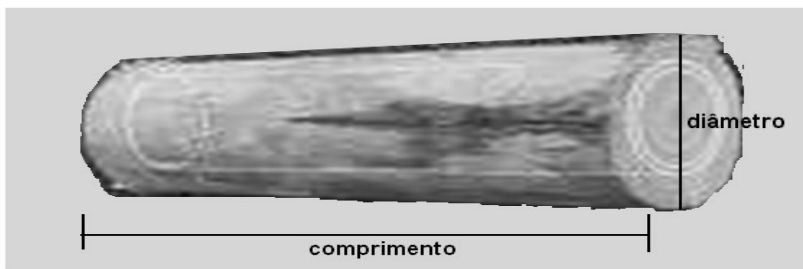
Vamos pensar em uma aula a ser dada na Educação de Jovens e Adultos (EJA) para o ensino médio, na qual a temática a ser abordada dentro de uma perspectiva pedagogicamente “correta” de conhecimento e problematização da realidade seja a educação ambiental. Como consideramos que nossa prática pedagógica é contingencial, então o contexto a ser considerado para esta nossa abordagem será o assunto do desmatamento visto que podemos estar numa área rural ou nossos alunos desenvolverem uma atividade produtiva nesse sentido.

Inicialmente poderíamos perguntar ao(s) aluno(s) se ele(s) considera(m) esse tema importante. Por que nos últimos anos tem sido frequente o desmatamento em diferentes regiões e cidades brasileiras? Poderíamos pedir para citar algumas práticas que contribuem para agravar o problema e se conhecem algumas espécies vegetais e animais que têm sido mais afetadas com a prática do desmatamento na sua região? Esses comentários poderão ser registrados.

Da mesma forma poderíamos levar algumas das seguintes informações e ou *verdades circulantes* em torno da temática em questão, assim leria-se o seguinte: no período de 1995 a 2000, foram desmatados 177 800 hectares. Embora a área de desmatamento tenha sido reduzida para 21 800 hectares no período de 2000 a 2005, ainda é uma área muito grande. O método utilizado para o corte de árvores pouco difere de um país para outro. Após a queda corta-se a copa, galhos e o tronco da árvore onde este é dividido em partes com aproximadamente 5 metros de comprimento. Cada uma dessas partes é chamada de tora. Em algumas regiões do Brasil, o volume de uma tora é determinado com o auxílio de uma corda.

Após a leitura, lançaríamos a seguinte questão: como se faz a medição com corda de uma tora de árvore?

Esta questão poderá ser respondida na forma de relato ou narrada através de um texto escrito indistintamente pelos alunos envolvidos com a prática da

extração da madeira. Outra opção poderia ser difundir e deixar registrado o que conhecemos sobre a referida prática de medição:

Primeiramente, dá-se uma volta completa com a corda ao redor da tora, posicionando a corda onde corresponda o valor médio do seu comprimento. A seguir, a corda é dobrada duas vezes pela metade, como se tivesse sido dividida em quatro partes e uma dessas partes é medida com uma trena. O valor obtido é elevado ao quadrado e em seguida multiplicado pelo comprimento da tora. Esse é o volume estimado de madeira da tora. Logo, considere valores para os alunos estimarem e discutirem em torno do cálculo do volume de madeira com este procedimento.

Outra maneira de se obter o volume estimado de madeira de uma tora é considerando-a como um cilindro circular reto.

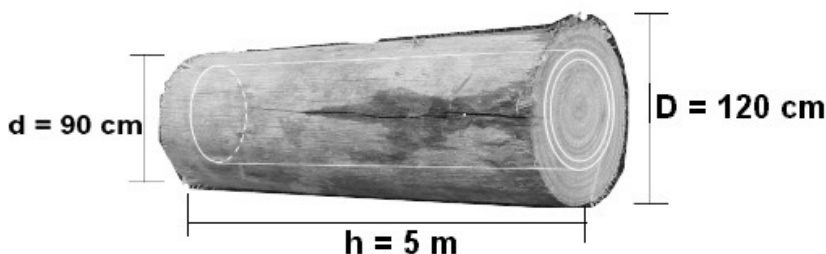
O volume do cilindro é determinado da mesma maneira que calculamos o volume de um prisma, ou seja, multiplicando a medida da área da base pela medida da altura.[7]

[7] Neste caso é bom lembrar que para o cálculo da área da base de um cilindro precisa-se saber calcular a área de uma figura circular qualquer e que para tanto é necessário prestar atenção aos saberes necessários para esse cálculo como por exemplo, do valor de pi = 3,14159....

O primeiro procedimento apresentado é comumente utilizado pelas pessoas que se dedicam à extração de madeira , enquanto que o segundo é o processo de cálculo que poderíamos chamar de matemático formal.

Certamente, existem diferenças entre os resultados obtidos nos dois procedimentos utilizados. Caberia perguntar se essa diferença é significativa.

Segundo os que conhecem a técnica, e isto poderá ser avaliado pelos alunos, essa diferença, praticamente equivale às perdas de madeira no processo de corte para a comercialização. As pessoas que se dedicam à extração da madeira sabem dessa diferença e aceitam-na porque ao desdobrar a tora em tábuas, sobram as costaneiras[8], que são as tábuas da periferia do tronco que não são comercializadas.

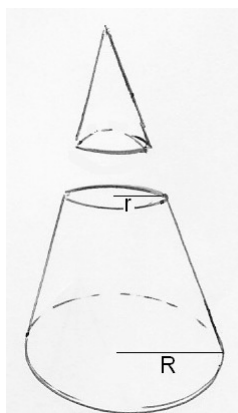
Por outro lado, o processo de medição de tora adotado pela indústria madeireira considera o comprimento da tora e seu diâmetro na extremidade mais fina como referência para a determinação do volume. Do resultado obtido diminui-se ainda 30% para desconsiderar o desperdício. Esse é o volume de madeira obtido através de um dos processos adotados pela indústria madeireira em algumas regiões do sul do País.

Assim, considerando a medida da tora acima, quais serão os cálculos necessários? Qual será o volume da tora apresentada acima? Qual será o volume aceito pela madeireira?

Diferentemente, o método adotado pelo Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e de Recursos Renováveis (Ibama) para o cálculo estimado do vo-

[8] Costaneira é a tábua obtida da extremidade exterior de um tronco ou de uma tora e que não é tão perfeita quanto as outras serradas da parte interior da tora.

lume de madeira nesse tipo de tora consiste em efetuar o produto da média entre as medidas das áreas das extremidades pela medida da altura da tora.

A diferença entre os métodos de obtenção do volume de madeira tem sido assunto de frequentes polêmicas entre o Ibamae as madeireiras.

Finalmente, vamos assumir que o volume da tora de madeira a ser estimado seja efetivamente o de um tronco de cone, sólido geométrico que se aproxima da forma desse tipo de tora.

No tronco do cone podemos destacar:

- A base maior de raio R;
- A base menor de raio r;
- A altura h, que é a medida da distância entre as duas bases.

O volume do tronco de cone é obtido pela relação matemática:

$$V = \pi \frac{h}{3}\left(r^2 + rR + R^2\right)$$

Considerando os diversos métodos que se utilizam para o cálculo do volume de madeira, compare os resultados. O que você pode observar, argumentar, inferir, justificar? De que maneira todas as questões apontadas se relacionam ao “meio ambiente” social, cultural e político no qual você vive? Fez sentido discutir esses tipos de ações, procedimentos? Por quê?

Ao longo deste exemplo pretendemos que tenham ficado explícitos aqueles quatro pontos considerados centrais na interpretação, na leitura e na escrita a procura da produção de si, do outro e do mundo em meio a diferentes práticas discursivas, narrativas e significações entre elas e a matemática. Dessa perspectiva, a pedagogia de um modo mais geral, e em consequência a educação matemática, não pode ser vista como um espaço neutro e não problemático de mediação, ou no dizer do Larrosa (2002, p. 57) um mero espaço de acontecimentos e possibilidades para a autonomia, autocrítica, autoconfiança, autocontrole [auto-x]. Porém, um espaço de produção de experiências nas quais os indivíduos possam se tornar sujeitos de um modo particular.

PALAVRAS NÃO TÃO FINAIS

Argumentar, narrar, julgar, expressar-se, posicionando-se e regulando-se através dos comentários às diferentes questões formuladas são, a partir da produção de sentidos no dizer do Larrosa (2002), formas de constituição do eu, constituição de si mesmo.

Como vimos desde o início do nosso texto a ambiguidade de diferentes discursos, inclusive do matemático, atravessando o espaço de sala de aula através das práticas de argumentação, de leitura e de escrita, coloca-nos também inevitavelmente diante da ambiguidade de sujeitos, posicionados e constituídos em lugares singulares. Assim, nem os sujeitos, nem o discurso matemático e nem qualquer outro discurso é plausível de ser capturado ou enquadrado por uma lógica unificadora, tornando-se impossível diferenciar ou definir o que poderá ser visto como verdade, ficção ou modo de pensar. Contudo, e pedagogicamente falando, podemos enunciar as regras com e pelas quais os nossos alunos possam definir para si como e quando alguma produção cultural possa ser considerada verdadeira, apenas ficção ou resultado do modo de pensar do outro.

REFERÊNCIAS

BAKHTIN, M. **Marxismo e filosofia da linguagem.** São Paulo: Hucitec, 1995.

BELLO, Samuel Edmundo L. Diferenciação, relações de poder e etnomatemática: historiografia, perspectivas e (res)significações. **Revista Horizontes**, v. 24, n. 1, p. 51-67, jan/jun. 2006.

DANYLUK, O. **Alfabetização matemática:** as primeiras manifestações da escrita infantil. Porto Alegre: Sulina, 2002.

FEYERABEND, P. **Diálogos sobre o conhecimento.** São Paulo: Perspectiva, 2001.

HARIKI, Seiji. A ambigüidade do discurso matemático. **Epsilon, Sec. Comunicações**, n. 22, 1992. p. 999-103.

KNIJNIK, Gelsa; WANDERER, Fernanda; OLIVEIRA Cláudio José de. A “experiência de si” em um processo avaliativo de estágio docente no campo da educação Matemática. **Educação e Cultura contemporânea**. Rio de janeiro, v. 2, n. 4, p. 59-70, jul:dez 2005.

LERAT, P. **Las lenguas especializadas.** Barcelona: Ariel, 1997.

MACHADO, N. **Matemática e língua materna (análise de uma impregnação mútua).** São Paulo: Cortez, 1998.

MAZZEI, Luiz Davi. **Dificuldades de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático:** analisando a linguagem empregada por professores e alunos. Dissertação (Mestrado) - FACED-PUCRS, Porto Alegre, 2004.

SUASSUNA, Lívia. Para além do lingüístico: a produção escrita na escola. **Presença Pedagógica**. Belo Horizonte: Dimensão, v. 3 , n. 14, p. 45- 53, mar./abr. 1997.

CAPÍTULO 06

A UTILIZAÇÃO DO CÁLCULO MENTAL NO ENSINO FUNDAMENTAL

Angela Aparecida Pasinato Dalsasso
Tânia Stella Bassoi

INTRODUÇÃO

A habilidade com o cálculo mental é necessária para: a compreensão dos números e suas propriedades, o estabelecimento de estimativas, o uso prático em atividades cotidianas e a aprendizagem das operações matemáticas. Uma das finalidades desse ensino consiste em fazer com que os alunos desenvolvam e sistematizem procedimentos de cálculo por estimativa e estratégias de verificação e controle de resultados.

Para atender a esse objetivo é primordial que os alunos aprendam a reconhecer se certos resultados relacionados a contagens, medidas e operações são ou não razoáveis. A estimativa constrói-se juntamente com o sentido numérico e com o significado das operações, auxiliando no desenvolvimento da capacidade de tomar decisões. O trabalho com estimativas supõe a sistematização de estratégias e seu desenvolvimento e aperfeiçoamento dependem de um trabalho contínuo de aplicações, construções, interpretações, análises, justificativas e verificações a partir de resultados obtidos.

Ao identificar os intervalos que tornam uma estimativa aceitável ou não, os alunos aprendem a justificar e comprovar suas opiniões, refinando assim suas habilidades em cálculo. Por isso, as estimativas devem ir além da simples identificação das relações *maior do que*, *menor do que*, centrando-se na relação *estar entre*, para reduzir a incidência de erros de cálculo.

Os procedimentos de cálculo por estimativa desenvolvem-se concomitantemente aos processos de cálculo mental das seguintes formas: pelo reconhecimento da grandeza numérica, por meio de decomposições dos números, pelo estabelecimento de relações de dobro e metade, entre outros. Esse processo apoia-se em aspectos conceituais referentes aos números e às operações (ordem de grandeza, valor posicional, proporcionalidade e equivalência), em procedimentos (como decompor, substituir, arredondar, compensar) e na aplicação de estratégias de cálculo mental.

> A importância do cálculo mental é que um mesmo cálculo pode ser realizado de diferentes formas, de modo que a reflexão sobre o significado dos cálculos intermediários auxilia na compreensão dos algoritmos do cálculo escrito, facilitando a escolha do método que melhor se adapta à situação determinada e às operações envolvidas. Assim, cada situação de cálculo constitui-se num problema aberto, que pode ser solucionado de diferentes maneiras, recorrendo-se a diferentes procedimentos individuais para encontrar determinado resultado. Polya (1978) descreve que para a resolução desse problema existe sempre uma pitada de descoberta e a possibilidade de desafiar a curiosidade(principalmente se ele colocar em jogo as faculdades inventivas). Esses desafios colocados por um problema poderão levar o aluno a gostar do trabalho mental.

Há que se considerar também que cada situação de cálculo mental se coloca como um problema que, para ser solucionado, exige que o aluno utilize procedimentos originais ou já existentes. Geralmente, esses procedimentos de cálculo mental são diferentes dos algoritmos aprendidos na aritmética escolar.

Os objetivos propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da matemática em relação ao cálculo mental no segundo ciclo são:

> Ampliar procedimentos de cálculo — mental, escrito, exato, aproximado — pelo conhecimento de regularidades dos fatos fundamentais, de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados. [...] Utilizar diferentes registros gráficos – desenhos, esquemas, escritas numéricas – como recurso para expressar ideias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados. (BRASIL, 1997, p. 81)

Os recursos de cálculo são ampliados neste ciclo pelo fato de o aluno ter uma melhor compreensão do sistema de numeração decimal, além de uma maior flexibilidade de pensamento para a construção do seu cálculo.

> O cálculo mental apóia-se no fato de que existem diferentes maneiras de calcular e pode-se escolher a que melhor se adapta a uma determinada situação, em função dos números e das operações envolvidas. Assim, cada situação de cálculo constitui-se num problema aberto que pode ser solucionado de diferentes maneiras, recorrendo-se a procedimentos originais para chegar ao resultado. (BRASIL, 1997, p. 117)

No cálculo mental, a reflexão centra-se no significado dos cálculos intermediários. Isso facilita a compreensão das regras do cálculo escrito. O exercício e a sistematização dos procedimentos de cálculo mental, ao longo do tempo, levam-no a ser utilizado como estratégia de controle do cálculo escrito.

Parra (1996, p. 195-199) aponta quatro razões para a inclusão de cálculo mental nas escolas. São elas:

1 - os conceitos e habilidades aprendidos a partir de estratégias de cálculo mental influem positivamente na capacidade de resolver problemas; os alunos constroem uma representação das relações que há entre os dados e da forma como poderão obter novas informações;

2 - o cálculo mental aumenta o conhecimento do aluno sobre o campo numérico; as atividades de cálculo mental propõe o cálculo como objeto de reflexão, favorecendo o surgimento e o tratamento das relações matemáticas;

3 - o trabalho de cálculo mental habilita a construção de um conhecimento que favorece uma melhor relação do aluno com a matemática, sendo vista como uma aventura de conhecimento e compromisso que vale a pena empreender;

4 - o cálculo mental deve ser acompanhado de um aumento progressivo do cálculo automático, tornando-se uma ferramenta de controle.

A interpretação de um problema e a escolha do procedimento para resolvê-lo desenvolvem na criança o poder de formular hipóteses, selecionar dados e organizar e comparar situações, não só na aprendizagem da matemática da escola, como também no seu uso cotidiano.

Propor situações-problema, nas quais estratégias de cálculo mental sejam colocadas em prática – Parra e Saiz (1996); Carraher (1991); Zunino (1995) – requer a interação aluno-colega e aluno-professor. O cálculo mental é necessário para uma compreensão do número e de suas propriedades, que propiciam o estabelecimento de estimativas, o manuseio das técnicas de

decomposição e o uso prático da matemática nas atividades cotidianas. O uso das propriedades de operações básicas para o cálculo mental auxilia na solução de cada novo problema matemático.

Além disso, a habilidade com o cálculo mental pode contribuir para a aprendizagem de conceitos matemáticos e para o desenvolvimento e compreensão da formação dos algoritmos escolares desenvolvidos na escola. Contudo, somente a habilidade em cálculo mental não garante um avanço no domínio escrito e na compreensão das operações no Sistema de Numeração Decimal, (SND) como verificado na pesquisa realizada de Carraher (1991), na qual as crianças faziam os cálculos no seu dia a dia com certa facilidade, devido aos procedimentos desenvolvidos por eles, ainda que na escola não conseguissem compreender os algoritmos apresentados pelo professor.

O professor, ao propor um cálculo mental, precisa, primeiro, observar os números que vão ser somados para, em seguida, escolher um procedimento vantajoso: somar os iguais?, apoiar-se no dez, no cem ou no mil?, decompor as parcelas e associá-las convenientemente?, usar um "número redondo"? Qual é o processo mais adequado? Além disso, às vezes, depois de escolhido um procedimento, percebemos que há outro mais conveniente. Tudo isto estimula o raciocínio. Então,

> Porque as crianças desconfiam tanto de suas próprias possibilidades de calcular um resultado de maneira aproximada? Sentem esta desconfiança de modo geral ou só na escola? Pensarão que a estimativa de um resultado possível serve para vida cotidiana porém não é válida na escola, onde muitas vezes os problemas e as contas se avaliam levando em conta só a exatidão dos resultados, sem considerar a correção das estratégias utilizadas? (ZUNINO, 1995, p. 88)

Os alunos devem saber não só a forma como a matemática é aplicada ao mundo real, mas também como se desenvolve a partir do mundo que os rodeia; devem ser também capazes de efetuar rapidamente cálculos aproximados, através do cálculo mental e de técnicas de estimação. Quando o cálculo é necessário num problema ou num cenário de consumo, por exemplo, a estimativa pode ser usada para verificar a razoabilidade da solução, para examinar uma conjectura ou tomar uma decisão.

O professor deve ter como objetivo fazer com que o aluno consiga aplicar o que aprendeu em sala de aula, relacionando a matemática escolar com a matemática da vida. Não se deve tomá-las como duas coisas diferentes, pois a matemática existe tanto por uma necessidade humana de quantificar e medir o mundo quanto pela necessidade de utilizar de seus métodos em nosso cotidiano.

O cálculo mental sugerido no ensino da matemática nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ao se apresentar como objeto de pesquisa de educadores matemáticos e se fazer presentes nos livros didáticos, suscitou-nos a curiosidade de investigar como crianças do Ensino Fundamental o utilizam e como expõe seus métodos.

MATERIAL E MÉTODOS

Foi realizada uma entrevista com três crianças de séries diferentes: Catarina e Laura, de 8 anos (alunas da 3ª série) e Luiz, de 10 anos (aluno da 4ª série). Usamos nomes fictícios para preservar a imagem dos entrevistados. As crianças são alunos da rede pública e privada da cidade de Cascavel. O roteiro de entrevista baseou-se nos métodos utilizados por Parra (1996) e Zunino (1995). As entrevistas ocorreram em dias diferentes para cada uma das crianças. Todas foram gravadas e transcritas. Foi apresentado, em cartões, um conjunto de operações com adição e subtração. As crianças escolhiam os cálculos que achavam fáceis, justificando suas opções. As operações apresentadas foram:

15 + 5
56 – 7
3 + 4
22 + 3
60 + 1
33 – 11
8 + 2
100 – 30
47 + 17
9 – 1
50 + 20
76 – 6
10 + 6

As operações escolhidas por todos foram as seguintes : 10 + 5; 10 + 6; 60 + 10 ; 3 + 4; 8 + 2. Dentre as respostas dadas às operações, apareceu a seguinte manifestação para 10 + 5: "Não sei, só sei que é 15", diz Laura. Os outros responderam prontamente que era muito fácil: 15.

Encontramos também maneiras diferentes de resolução para a cartela 3 + 4. Conforme Catarina, "3 + 4 é fácil porque 4 mais 4 é 8 menos um é sete". Por outro lado, Laura disse "Somei nos dedos, é 7".

As crianças utilizam diferentes estratégias para resolver uma situação proposta pelo professor, como no caso de Catarina e Laura – a primeira utiliza a estratégia do dobro e subtrai uma unidade, enquanto a outra usa as mãos como auxílio para contagem.

Para a subtração 9 –1, Luiz fala "Com certeza 9 – 1, quem que não vai achar isso fácil, só de ver a gente faz a conta. É 8". "É muito fácil, porque a gente mesmo pode contar, 9 – 1 é 8", respondeu Catarina. Estas duas crianças entendem que retirar uma unidade de um número é a mesma coisa que pegar o antecessor.

Entre as menos escolhidas pelas duas crianças da 3ª série, temos 100 – 30; 47 + 17; 22 + 3; 56 – 7; 74 – 4. A criança da 4ª série rejeitou a 100 – 30 .

Os cartões menos escolhidos foram aqueles que apresentaram operações de subtração. Os motivos foram: "Só não vou pegar de menos, de menos não" (Laura). "Porque você tem que diminuir muito" (Catarina).

Com a insistência da pesquisadora, Laura descreve como faz subtração: aplicando o método "canguru" ensinado pela professora: "É que a minha professora do ano passado me ensinou assim, quer ver? A deste ano também está ensinando a gente do mesmo jeito. Faz um traço na parte inferior do papel e coloca os números de 1 a 10. A professora disse que a conta do canguru é assim: se tenho 8 não posso ir pro 7, só para frente aí empresto um e fica 17 e a gente conta até chegar 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 (contando nos dedo). Nove". Esta criança demonstrou aversão às operações de subtração, o que acreditamos estar relacionado com este método – se for utilizado para números menores do que dez é até fácil, mas com números maiores as crianças sentem dificuldade para guardar e quantificar a situação para uma operação de subtração.

Na subtração 33 – 11, "Você pega os dedos, daí você vê quanto você tem que diminuir e você faz 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15..." explica Catarina. Neste caso, a professora pede que ela pegue o todo e diminua a quantidade pedida: ela tem que fazer a contagem regressiva, no entanto se perde no quanto já diminuiu, não conseguindo chegar ao resultado. Esta criança declarou que prefere o algoritmo convencional na subtração com dezenas. "É só fazer 33 – 11, 3 – 1 igual a 2, o outro não preciso fazer é igual". Na operação 56 – 7: "56 – 7 eu tiro 6 do 56 que é 50 – 1 é 49" responde Catarina. Aqui a criança demonstrou ter uma estratégia de cálculo mental, segundo a qual retiram-se unidades até chegar na dezena cheia. Sabendo que falta ainda uma unidade a ser retirada, cai-se no caso do 9 – 1: basta achar o antecessor.

A operação que teve uma maior rejeição foi 100 – 30. "É mais difícil" disse Luiz. No entanto, ao ser interpelado, o aluno fez o cálculo correto, primeiro dizendo que "chutou" o resultado, depois corrigindo: "Não foi só chute, eu também pensei um pouco, 90 não era porque só diminui 10, 80 é 20, então é 70". Laura e Catarina, mesmo questionadas, não demonstraram interesse na resolução dessa operação e não se manifestaram. Nessa situação, vemos a caracterização do papel do professor em sala: ele é tido como imprescindível no desenvolvimento matemático das crianças, o que faz com que a criança, apesar de achar o cálculo difícil, faça um esforço para encontrar uma forma de resolução.

Luiz, de posse do cartão 47 + 17, disse "Somei 7 mais 7 que é 14, passei o 1 junto com o 4 mais 1 igual a 64. Eu armei na cabeça".

Já a Laura argumentou frente ao cartão 50 + 20: "Somo assim 0 + 0 é 0 e 5 mais 2 é 7, só que na cabeça". Nesta fala, aparece a utilização do algoritmo padrão da escola como sendo uma estratégia de cálculo mental.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As falas das crianças nos levam a pensar que os conceitos e habilidades aprendidos a partir de estratégias de cálculo mental influem positivamente na capacidade de resolver problemas, pois dão maior confiança às crianças.

Entendemos que *cálculo mental* não é fazer conta de cabeça utilizando os procedimentos tradicionais, e sim buscar alternativas de cálculo, mais apropriadas para a compreensão da matemática.

A prática do uso de estimativa de resultados deve ser usada como procedimento para os alunos verificarem a possibilidade de ocorrência de um resultado. Os procedimentos de cálculo por estimativa desenvolvem-se concomitantemente aos processos de cálculo mental pelo reconhecimento da grandeza numérica, por meio de composições e decomposições dos números, pelo estabelecimento de relações de dobro e metade, entre outros.

Reconhecemos a memorização da tabuada estimulada pelo uso do cálculo mental, uma vez que as crianças entrevistadas demonstraram rapidez ao expressarem “2 x 7 é 14” “4 + 4 é 8”. Neste caso, o cálculo mental é resgatado de um procedimento já aprendido, pois o aluno calcula com agilidade, utilizando-se ora de estratégias pessoais ora de estratégias convencionais.

Os professores, às vezes, ao trabalharem em sala com o cálculo mental, utilizam técnicas que confundem mais do que auxiliam. Assim, as crianças acabam preferindo o algoritmo convencional, por ser algo que lhes dá mais segurança. Talvez estes professores, ao ensinarem determinadas técnicas, considerem que seus métodos facilitem a vida das crianças. Contudo, as declarações de Laura e Catarina, quanto as suas dificuldades com cálculos de subtração, nos fazem acreditar que o método do canguru mais confundiu do que ajudou.

Por outro lado, quando o professor pergunta e investiga o raciocínio da criança, ela tende a desenvolver suas próprias técnicas de cálculo, pensando mais profundamente numa situação *a priori* difícil, como observamos com Luiz (no cálculo 100 – 30). As crianças parecem apresentar uma maior facilidade de compreensão quando auxiliadas pela fala, em comparação à forma escrita apresentada nos cartões.

As estratégias de cálculo mental, pela sua própria natureza, são limitadas. É muito difícil, principalmente tratando-se de cálculos envolvendo números com vários dígitos, armazenar na memória uma grande quantidade de resultados. Assim, a necessidade de registro de resultados parciais acaba originando procedimentos de cálculo escrito – ou mesmo o apelo à calculadora.

Nos dois primeiros ciclos, o objetivo principal do trabalho com o cálculo consiste em fazer com que os alunos construam e selecionem procedimentos adequados à situação-problema apresentada, aos números e às operações nela envolvidas. Por exemplo: numa situação de compra em um supermercado, para saber se é possível continuar comprando ou não, em função do dinheiro de que se dispõe, basta fazer um cálculo mental aproximado.

Assim, é recomendável, ao ensinar as operações, que se privilegie um trabalho capaz de explorar concomitantemente procedimentos de cálculo mental e de cálculo escrito, exato e aproximado, de tal forma que o aluno possa usar um ou outro quando for conveniente.

De forma simples, pode-se dizer que se calcula mentalmente quando se efetua uma operação possível, ou seja, quando o cálculo mental se apresenta como um procedimento confiável, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos físicos.

A matemática escolar valoriza o cálculo no papel – neste ínterim, é importante observar que o cálculo mental não exclui a utilização de papel e lápis, mas como um mero registro dos cálculos intermediários. O registro do cálculo mental possui uma forma específica para ser realizado e cada aluno tem o seu próprio método de registro. É importante que as pessoas desenvolvam suas próprias técnicas de cálculo, para que não fiquem limitadas a um único processo.

Os conceitos e as habilidades aprendidos a partir de estratégias de cálculo mental influem positivamente na capacidade de resolver problemas, a partir do momento em que o aluno passa a buscar um caminho pessoal para encontrar uma solução, qualquer que seja o âmbito numérico ou a dimensão do problema.

Grande parte do cálculo realizado fora da escola é feito a partir de procedimentos mentais, que nem sempre são levados em conta no trabalho escolar.

Pelo aspecto do cálculo, adição e subtração também estão intimamente relacionadas. Para calcular mentalmente 40 - 26, alguns alunos recorrem ao procedimento subtrativo de decompor o número 26 e subtrair primeiro 20 e depois 6; outros pensam em um número que devem juntar a 26 para se obter 40, recorrendo, neste caso, a um procedimento aditivo.

Por exemplo, quem decompõe mentalmente o número 123 em 100 + 20 + 3, mostra que compreende o princípio aditivo e o valor posicional do nosso sistema de numeração.

Portanto cálculo mental nas séries iniciais do ensino fundamental auxilia a:

- compreender o sistema numérico decimal e os algoritmos do cálculo escrito;
- estimar resultados;
- melhorar a relação do aluno com a matemática;
- observar princípios como a decomposição, equivalência e igualdade dos números;
- desenvolver o raciocínio e a criatividade na resolução de problemas;
- desenvolver estratégias de verificação de resultados obtidos.

As crianças que são estimuladas a efetuar o cálculo mental, com auxílio do professor, demonstram mais segurança ao enfrentar situações-problema e mostram-se mais capazes de escolher caminhos certeiros que levem à solução de um problema.

É necessário então que o professor busque, com seus alunos, melhores estratégias para o ensino e para a aprendizagem do cálculo mental da matemática, para que seja possível resolver problemas utilizando jogos, literatura, quebra-cabeças, entre outras técnicas. Estes componentes auxiliam os alunos a desenvolver técnicas e também a ampliar a confiança em sua capacidade de aprender matemática, o que torna possível uma melhor utilização de tal conhecimento em outras situações.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília MEC/SEF, 1997.

CARRAHER, T. N. **Na Vida dez na Escola Zero**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

PARRA, C. Cálculo Mental na escola primária. In: PARRA, C; SAIZ, I. (Org.). **Didática da Matemática** – reflexões psicopedagógicas. 1. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 186-235.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: Ed Interciência, 1978.

REAME, E. de S. Cálculo Mental, Pegue este Atalho. In: **Revista Nova Escola**, n. 116, out. 1998.

ZUNINO, D. L. de. **A Matemática na Escola:** Aqui e Agora. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 1995.

CAPÍTULO 07

OS PROFESSORES E O ENSINO DE FRAÇÕES NO 2º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Louisianne Christine Bonzanini
Tânia Stella Bassoi

INTRODUÇÃO

A principal constatação – e preocupação – que levou à formulação deste trabalho é a de que a matemática das séries iniciais é ministrada por professores que tiveram parcos conhecimentos de matemática em sua graduação. A maioria dos professores atuantes nas séries iniciais são os que concluíram o 2º grau com habilitação para o magistério e os graduados em pedagogia. Nos cursos de pedagogia, muitas vezes a disciplina de matemática ou de didática da matemática contém carga horária insuficiente para um bom desempenho na prática de ensino, fazendo o professor privilegiar outras áreas do conhecimento, ou seja, a que tem mais afinidade. Para Teixeira e Santos (1998, p. 345), "sabe-se que as dificuldades de aprendizagem dos alunos têm várias causas e muitas delas dizem respeito ao preparo dos seus professores e ao tratamento dispensado ao ensino da matemática".

As crianças, desde muito pequenas, têm noção do que seja o número. À medida que crescem sua aprendizagem se amplia, estando subordinada à comunidade cultural a qual pertencem. Dessa forma, ao chegar na escola, possuem conhecimentos matemáticos que fazem parte de sua inserção social. Esse primeiro contato é normalmente oral, como verbalizar sequências numéricas, reconhecer algumas formas geométricas e fazer cálculos mentalmente com quantidades pequenas. É na escola que esse conhecimento anteriormente

adquirido vai auxiliar ou dificultar a transformação desses conhecimentos intuitivos em conceitos operatórios, passando da matemática informal para a matemática formal.

Nesta passagem o professor desempenha um papel fundamental. Para seu melhor desempenho ele deveria compreender que a criança entra na escola carregando um conhecimento que lhe é familiar e que deverá ser transformado em um conhecimento sistematizado.

Teriam esses professores plenas condições de ensinar matemática em momento tão significativo do processo cognitivo do aluno? Seriam eles os responsáveis por dificuldades nas séries posteriores, ajudando, até, a criar uma rejeição na criança pela disciplina de matemática?

Para Brito e Lima (2001, p. 107) "como consequ*ência destes e de tantos outros fatores, professores em exercício podem não conseguir analisar com desenvoltura um conceito e suas aplicações; pré-requisito essencial para a aprendizagem significativa de conceitos".*

Para Ausubel (*apud* BRITO; LIMA, 2001, p. 108), a aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com aspectos relevantes, previamente adquiridos pelo aprendiz, ou seja, o mais importante é aquilo que o aprendiz já sabe. Caso este não tenha uma representação mental relativa a essa nova informação, a aprendizagem ocorrerá de forma mecânica, pois

> a pré-disposição para a aprendizagem mecânica advém do fato de, repetidamente, serem apresentados aos indivíduos conhecimentos que não obedecem às condições para a existência de aprendizagem significativa. Não possuindo uma estrutura clara e estável de conhecimentos, então, ao indivíduo resta somente a alternativa de executar de modo mecânico e com relativo sucesso, tornando-se hábil em decorar algumas sentenças ou palavras-chaves, o que lhe é exigido. (BARALDI, 1999, p. 40)

Algumas ideias, abaixo relacionadas, explicam melhor o conceito de aprendizagem significativa:

> a) as ideias relevantes, que, geralmente, situam-se em uma área ocupada por um mesmo assunto ou uma mesma disciplina; b) os conceitos mais amplos, que são fundamentais para a aprendizagem dos menos inclusivos

> ou subordinados, pois estes decorrem dos mais amplos; c) é essencial que as ideias relevantes tenham sido aprendidas com clareza, e com igual clareza sejam estabelecidas na estrutura cognitiva; d) é indispensável, também, que o indivíduo tenha uma predisposição positiva para efetuar o relacionamento entre as novas ideias e as ideias relevantes disponíveis, aqui chamadas de subsunçoras ou ideias de esteio. (BRITO; LIMA 2001, p. 109)

Outro aspecto a ser considerado para que ocorra a aprendizagem significativa é a qualidade do material de aprendizagem. Este deve possibilitar ao indivíduo estabelecer relações não arbitrárias e substantivas, nas quais os conceitos trabalhados pertencem a um conceito específico mais amplo. Para Ausubel (*apud* BRITO; LIMA, 2001, p. 109), "constitui-se em uma tarefa de aprendizagem que pode ser aprendida significativamente, tanto porque é logicamente significativo como porque as ideias relevantes estão presentes na estrutura cognitiva de um aprendiz".

Para melhor compreensão das categorias de aprendizagem, seguem-se as descrições abaixo:

> A *aprendizagem representacional* ocorre quando se estabelece uma equivalência de significados entre o símbolo arbitrário e seus correspondentes referentes. Um exemplo dessa aprendizagem é a nomeação dos objetos. O nome do objeto passa a significar o próprio objeto para um determinado indivíduo. A *aprendizagem proposicional* é a aprendizagem do significado de uma proposição logicamente significativa, expressa verbalmente em forma de sentença, onde uma sentença pode conter dois ou mais conceitos. Seguindo o pensamento de Ausubel, a aprendizagem representacional e a conceitual, seriam pré-requisitos para a aprendizagem proposicional. (BRITO; LIMA, 2001, p. 109)

A *aprendizagem proposicional* é *subordinativa* quando o aprendizado de um novo conceito pode estar relacionado a ideias particulares relevantes já presentes na estrutura cognitiva do aluno. Este tipo de aprendizagem se subdivide em *subordinação derivativa*, aprendizagem em que novas ideias poderiam ser exemplos da ideia de esteio. Como exemplo, a compreensão de que pentágonos, hexágonos e heptágonos também são polígonos, como os triângulos e quadriláteros, os quais foram definidos num primeiro aprendizado.

Será *subordinação correlativa* quando a aprendizagem de novas ideias gera extensões, elaborações ou modificações de uma ideia relevante já existente na estrutura cognitiva de quem aprende, por exemplo, o indivíduo já aprendeu que o triângulo equilátero tem três lados de mesma medida, esse conceito é modificado para incluir, por exemplo, que um triângulo equilátero também tem três ângulos de mesma medida.

A aprendizagem proposicional é *superordenada* quando se aprende uma nova proposição a partir de ideias menos gerais em direção a ideias ou conceitos mais inclusivos, por exemplo, quando a criança aprende que os conceitos de porcentagem, números decimais e números fracionários são relacionáveis com números racionais.

Finalmente, a aprendizagem será *combinatória* quando a aprendizagem proposicional fizer relação entre uma nova proposição e um conjunto de ideias relevantes já existentes – como, por exemplo, a definição de polígonos convexos, em relação aos outros conceitos de polígono envolvidos no estudo (BARALDI, 1999, p. 42).

A *aprendizagem conceitual*, por sua vez, é obtida através do conhecimento dos atributos essenciais, que são comuns a uma classe de objetos, eventos, situações ou propriedades. Ela se dá por meio de duas formas: formação de conceitos, que consiste num processo de abstrações dos atributos essenciais dos conceitos, que variam dependendo do contexto em outros aspectos essenciais ou em dimensões diferentes daquelas específicas em evidência; e assimilação de conceitos, processo que implica uma contínua reorganização da estrutura cognitiva, na qual os conceitos existentes são modificados à medida que interagem com novas percepções. A aprendizagem conceitual é uma espécie de aprendizagem representacional, e corresponde à etapa final da formação de conceitos. (BARALDI, 1999, p. 43-49)

Segundo Brito e Lima (2001, p. 113):

> a preocupação maior deste autor era sobre a aprendizagem verbal significativa, por ser esta, segundo ele, a aprendizagem predominante na sala de aula, sendo a aprendizagem significativa por recepção a que melhor caracterizaria o ensino expositivo presente em nossas escolas, onde o aluno recebe o conteúdo pronto, em sua forma final e acabada.

Em qualquer desses contextos, a linguagem verbal (oral ou escrita) representa um papel fundamental para o desenvolvimento cognitivo. "É por meio dela que o conhecimento é internalizado, codificado em sentenças ou formas simbólicas. Ainda, a linguagem é responsável pela viabilização da capacidade de compreendermos ou manipularmos relações entre abstrações sem o auxílio de experiências empírico-concretas". (BARALDI, 1999, p. 61)

Nesse ínterim, a linguagem é considerada parte integral do processo de aquisição de novas ideias, influenciando tanto a origem como o produto do processo de formação de conceitos e proposições abstratas novas, pois ela é responsável pela acumulação e pela transmissão do conhecimento humano.

Em relação ao ensino da matemática, mais especificamente em relação à interpretação dos problemas (quando é especialmente necessário o uso da linguagem), Gómez-Granell (*apud* NEHRING, 2001, p. 50) assevera:

> a linguagem formal caracteriza-se por suprimir o conteúdo semântico e expressar, da maneira mais geral e abstrata possível, o essencial das relações e transformações matemáticas. Este é um longo processo, no qual a interação e a dialética entre os aspectos matemáticos e extramatemáticos das diferentes situações assumem um papel fundamental. E é assim porque existe uma grande resistência do pensamento humano em abandonar o conteúdo do objeto expressado pela linguagem natural e pelo desenho, para substituí-lo pelo símbolo formal. Uma mesma criança pode usar o algoritmo convencional da divisão para resolver um problema familiar e recorrer a desenhos ou esquemas para resolver a mesma operação situada num problema de proporcionalidade cuja estrutura semântica é, portanto, mais complexa. Isto é, o importante não é determinar se os alunos possuem ou não um certo procedimento para resolver uma operação, mas em que condições tal procedimento pode ou não ser atualizado. Na resolução de problemas essas condições são dadas pelo contexto ou pela estrutura semântica do problema, e não só pelas operações matemáticas implicadas em função de certas variáveis contextuais.

Diante disso, poderiam esses professores estar propondo situações de ensino que permitissem a orientação dos processos de raciocínio dos alunos no sentido da aquisição das ideias operatórias básicas sobre frações?

MATERIAIS E MÉTODOS

Como nosso estudo tem por objetivo verificar as situações de ensino do conteúdo de fração usadas pelos professores, utilizamos a coleta de dados, na forma de questionário e entrevista semiestruturada, em duas escolas diferentes. Num primeiro momento, pedimos que quatro professores respondessem a um questionário. Em um segundo, entrevistamos todos. Escolhemos dois professores da Escola Municipal Prof.ª Dilair Silvério Fogaça, bairro Faculdade, na cidade de Cascavel (PR) e dois professores da Escola Municipal Prof.ª Gladis Maria Tibola, bairro Centro, também em Cascavel (PR).

Nossa metodologia propunha questionar os professores da 3ª e da 4ª séries do ensino fundamental sobre as situações envolvidas no ensino de frações. As situações foram propostas por eles e todos os dados foram considerados importantes, uma vez que, segundo Ludke (1986, p. 12), "o pesquisador deve, assim, atentar para o maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para a melhor compreensão do problema que está sendo estudado".

Para tanto, os questionários foram elaborados sem identificação nominal, com questões relacionadas à formação, tempo de magistério, graduação, pós-graduação, disciplina que mais gosta de trabalhar (incluindo justificativa), série que leciona e série que mais gosta de lecionar (incluindo justificativa). Os professores entrevistados são da 3ª e 4ª série das séries iniciais do ensino fundamental.

Para identificação, nesse trabalho chamaremos os professores da Escola Municipal Prof.ª Dilair Silvério Fogaça de

- D(11,4), professor que atua há 11 anos no magistério, possui graduação em Pedagogia e leciona na 4ª série. O primeiro número representa o tempo que o profissional atua no magistério e o segundo a série que leciona; e
- D(8,3), professor que atua há 8 anos no magistério, cursando Normal Superior e lecionando na 3ª série.

Por sua vez, chamaremos os professores da Escola Municipal Prof.ª Gladis Maria Tibola de

- G(25,4), professor que atua há 25 anos no magistério, é graduado em Pedagogia, com especialização em Psicopedagogia e leciona na 4ª série; e
- G(5,3), professor que atua no magistério há 5 anos, é graduado em História, com especialização em História e leciona na 3ª série.

RESULTADOS

A introdução do ensino de frações

No primeiro momento, quando é feita a introdução do ensino de frações, o professor D(11,4) faz uma pesquisa para avaliar o que o aluno já sabe: *"Eu trabalho começando por uma pesquisa, para saber o que eles entendem por frações"*. Para o professor G(25,4) o aluno deve ter um conhecimento prévio, uma vez que já passou pelas séries anteriores: "*Olha, na 4ª série geralmente os alunos já vêm com alguma base"*. Já os professores D(8,3) e G(5,3) não têm o costume de perguntar aos alunos sobre o que eles entendem sobre frações, e por isso subentende-se que para estes o ensino de frações será iniciado na 3ª série.

Portanto, quanto ao conhecimento prévio dos alunos, percebemos que, dos quatro professores estudados, há os que exploram o que o aluno já sabe, podendo ser de caráter escolar ou não (D(11,4) e G(25,4)) e os que não o fazem, por entender que o ensino das frações inicia-se ali (D(8,3) e G(5,3)).

Todos os professores entrevistados, apesar da diferença do tempo de magistério, são enfáticos ao afirmar que para ensinar frações é preciso partir do "concreto":

- D(11,4)*: "Eu sempre utilizo, por exemplo, frutas, laranja, maçã, ir cortando ao meio, depois ¼, etc., dobradura com forminhas de brigadeiro e outros materiais que a escola disponibilizar"*.
- D(8,3): *"Utilizando o dia a dia das crianças, ex. receitas, hora, tiras de papel, aplicação de alguma receita trazida pelos alunos, jogos de frações que temos disponíveis na escola etc."*.
- G(25,4): *"Fração, como o próprio nome já diz, são partes, então temos que trabalhar principalmente com o concreto, podemos trabalhar com papel, maçã, etc."*.
- G(5,3): *"Dá para começar com o material que a escola dispõe, com as frações de madeira, quadradinha e redondinha e com uma folha de*

caderno, com os jogos de frações vai montando as situações em cima do dia a dia deles".

Podemos observar que "concreto" para eles seria partir de uma situação física e prazerosa, que tenha relação com o cotidiano – como por exemplo, dividir uma maçã, um chocolate, um bolo ou ainda auxiliar a mãe na realização de alguma receita culinária. Segundo eles, essa relação do concreto/cotidiano x fração terá sentido para o aluno, garantindo a aprendizagem:

- G(25,4): *"Se não for bem construído o conceito a partir do concreto este aluno terá dificuldades de assimilação".*
- D(11,4): *"Trabalhar no concreto para que eles entendam o conceito, que é a maior dificuldade deles".*
- D(8,3): *"Para melhor compreensão utilizo material concreto".*

Outra questão levantada é o fato de "ser preciso trabalhar com o concreto antes de passar para o abstrato":

- G(5,3): *"Depois que eles fazem várias situações concretas é que passo para o desenho (exercícios), ou seja, situações com o abstrato".*
- G(25,4): *"Temos que sempre começar pelo concreto antes de entrar na parte escrita".*

Esse foi um dos pontos que nos chamou a atenção, por estar presente na fala de todos os professores.

Outro fator a ser considerado é que todos os professores entrevistados trabalham apenas com grandezas contínuas, não abordando as grandezas discretas. Grandeza é tudo aquilo ao qual podemos associar um valor numérico. Se o valor associado for resultado de uma contagem, dizemos que a grandeza é discreta. Caso contrário, dizemos que a grandeza é contínua.

Ressaltamos que cada um dos conceitos abordados pelos professores pode e deve ser explorado com grandezas discretas (coleções de tazos, tampinhas, palitos de picolé, por exemplo), e com grandezas contínuas (massa de modelar, água ou areia em copos descartáveis, por exemplo).

A dificuldade dos alunos

Os professores D(11,4) e G(,5,3) apontam a dificuldade dos alunos da seguinte forma:

- D(11,4): *"A maior dificuldade deles, por exemplo é entender que ¼ é uma parte de um todo que foi dividido em 4 partes e que eu só fui entender no magistério"*.

Nesse momento, eles assumem a própria dificuldade:

- G(25,4): *"Fração é uma parte complicada até para o professor"*.
- G(5,3): *"Até mesmo a gente tem dificuldade"*.

Ao mesmo tempo, há uma contradição, quando afirmam que *"é uma parte da matemática que não é difícil, mas os alunos precisam entender para poder compreender as outras partes do ensino de frações"*, como afirma D(11,4).

Nessa questão, constatamos a dificuldade do professor D(11,4), uma vez que ora há uma afirmação de que o ensino de frações é difícil até para quem ensina e ora a afirmação de que é uma parte fácil da matemática.

O papel do livro didático

Todos os professores entrevistados são unânimes em afirmar que utilizam o livro didático adotado pela escola como material de apoio:

- D(8,3): *"Eu utilizo como material de apoio, escolho algumas situações que se adapte a turma"*.
- G(25,4): *"Eu utilizo como um apoio"*.

Eles afirmam não se aterem somente a ele, buscando atividades em outros livros:

- G(25,4): *"...caminhar sempre fora, além do que o livro traz, pois existem muitas pesquisas, livros diferentes, às vezes no livro que você utiliza só tem o básico então você complementa com outro e você pode trabalhar aquilo que ficou meio falho"*.

A razão pelo pouco uso do livro didático se dá pelo fato de que, para esses professores, o exercício pelo exercício não faz sentido para o aluno:

- D(11,4): *"O livro tem muitos exercícios com as 4 operações de frações mas o exercício pelo exercício às vezes não tem sentido para o aluno"*.
- D(8,3): *"Muitas atividades que o livro traz não está de acordo com a realidade de nossos alunos e muitos exercícios não trazem significado para o aluno"*.

Por isso, alguns professores costumam utilizar situações que para estes fazem parte do cotidiano do aluno, envolvendo a ideia desses exercícios no intuito de facilitar a compreensão:

- D(11,4): *"Crio situações problemas para trabalhar com esses exercícios. Às vezes o livro traz exercícios do tipo: pinte ¼ do círculo ou do quadrado. Então, como temos alunos filhos de pais pedreiros, sugiro quanto o pai de X pintaria da parede se fosse pintar ¼ dessa parede"*.

Será que realmente situações dessa natureza e outras similares (como, por exemplo, mamãe vai fazer um bolo e precisa de ¼ de xícara de leite) fazem parte do cotidiano de todos os alunos? Será que essa vem a ser uma situação "concreta", como é afirmado e enfatizado por estes professores? Afinal, para eles o livro não traz informações concretas: *"utilizo o livro didático como material de apoio, já que o tempo todo que trabalho com frações, busco trabalhar o concreto"*, como afirma G(5,3).

Quando questionado por que acha que o exercício do livro não tem significado para o aluno, D(8,3) respondeu: *"por não ter relação com algum fato do dia a dia do aluno"*. Porém, se o aluno aprende, ele não seria capaz de estar resolvendo qualquer situação? Após esse trabalho exaustivo por parte dos professores – trabalhar com o "concreto" –, como ainda o aluno precisa de exercícios que mantenham essa relação? Essa necessidade não seria dos próprios professores?

A parte mais difícil do ensino de frações

Várias são as questões levantadas pelos professores: a primeira é a interpretação dos problemas de frações:

- D(11,4): *"na interpretação dos problemas de frações os alunos têm mais dificuldade de compreensão, essa questão da interpretação é problemática porque não é só matemática, temos que ensiná-los a pensar e não dar tudo pronto a eles"*.

No caso do professor D(8,3), este acredita que a criança aprenderá facilmente os conteúdos trabalhados na 3ª série devido à relação com seu dia a dia: *"na 3ª série os conteúdos trabalhados fazem parte do dia a dia da criança e fazendo essa relação ela não terá dificuldades para aprender"*. No entanto, ele aponta os conteúdos que teria dificuldade para trabalhar se tivesse que trabalhá-los com as crianças: multiplicação, divisão, fração imprópria, própria e mista, já que para este professor *"isso não faz parte da vida da criança e o abstrato é difícil de ser compreendido"*.

Outra questão abordada é a equivalência de frações:

- G(25,4): *"a parte mais difícil, na minha opinião, é a equivalência de frações, onde os alunos têm que saber que aquele mesmo inteiro equivale a aquela parte. Quando é perguntado onde têm mais, eles vão direto para aquele que tem partes menores, quando na verdade os dois têm o mesmo valor, eles não entendem que tem a mesma quantidade, então essa seria a parte mais difícil para o aluno entender"*.

Será que a dificuldade dos alunos não está na forma como as perguntas lhes são feitas? Logicamente, para eles a fração ½ será menos e essa interpretação centra-se nos algarismos menores, pois quando comparamos ½ com 2/4, teremos dois pedaços de ¼ e um de ½. Talvez o resultado fosse melhor se lhes questionássemos da seguinte forma: *de um lado eu tenho 1 folha de papel e, do outro, outra folha de papel dividida ao meio. Quero trocar essa folha inteira pelas partes, quantas partes eu precisaria para completar a folha inteira?*

Equivalência quer dizer "de igual valor". Quando questionado sobre o porquê dessa dificuldade dos alunos, G(25,4) respondeu: *"porque não foi trabalhado no concreto"*, reforçando a questão de que trabalhar com material manipulativo garante a aprendizagem, ou que só pela manipulação o aluno é capaz de aprender.

O professor G(5,3) aborda que teria dificuldades em trabalhar a multiplicação e a divisão, salientando o fato de que não só o aluno, mas o próprio professor possui dificuldades nessas operações: *"a gente mesmo tem que olhar e lembrar"*. Essa dificuldade, segundo ele, se dá porque *"as crianças vêm com defasagens das séries anteriores, então os professores têm que retomar do início novamente"*. O professor G(25,4) também aborda essa questão: *"têm professores*

que, nas séries anteriores, poderiam estar explorando as frações, mas deixam, por que isso, segundo alguns, é conteúdo de 4ª série, a 3ª série dá uma pincelada, mas o grosso é da 4ª série, quando os professores poderiam começar com noções desde a pré-escola, então na 4ª série a coisa aperta, pois temos que retomar tudo do início".

ANÁLISES

De maneira geral, os resultados obtidos com esse grupo de professores mostram que o ensino desse conteúdo não está sendo trabalhado levando em consideração a formação significativa de conceitos. Pelo que nos foi relatado, o entendimento do grupo de professores do que vem a ser aprendizagem significativa consiste em relacionar o conhecimento matemático estudado com o cotidiano do aluno, utilizar material manipulativo e partir do que o aluno já sabe, seja pela aquisição de conceitos da série anterior ou pelo que traz de conhecimento adquirido fora da escola.

A aprendizagem significativa, para esses professores contradiz o que Ausubel defende, pois, embora alguns partam do que os alunos sabem, os fracassos de aprendizagem são atribuídos ou à falha do ensino nas séries anteriores ou à dificuldade do próprio conteúdo matemático, seja em relação à aprendizagem ou ao ensino.

Uma questão bastante presente na fala dos professores é o *"trabalhar com material concreto"*. Mas o que é concreto? Concreto, para esses professores, nos parece ser trabalhar com o "físico" e com situações "do cotidiano", pois estas, segundo eles, seriam situações que trariam significado para os alunos, desconsiderando o que eles trazem consigo e o que já aprenderam como uma situação concreta e ignorando também que esse material não atingirá todos os alunos, uma vez que o que tem significado para A pode não ter para B, pois isso depende dos aspectos relevantes para cada indivíduo, conforme Ausubel.

Uma outra questão apontada como causadora de dificuldades na compreensão do conceito de frações é a série em que se inicia o seu ensino. Observamos que eles têm diferentes opiniões. Por exemplo, para um desses professores o ensino das frações deveria iniciar na pré-escola, 1ª e 2ª séries. A lógica é que,

se os professores não deixassem tudo para a 4ª série o aluno aprenderia mais facilmente. Jogar a culpa para as séries anteriores é altamente questionável.

Além disso, como temos observado, na proposta de Ausubel não é pelo fato desses professores estarem trabalhando isoladamente com o "concreto" (como eles afirmam) que os alunos estarão realmente aprendendo, uma vez que pelas entrevistas ficou evidente que os professores não têm clareza sobre o significado de trabalhar com situações concretas, materiais manipulativos e conhecimentos prévios. Na concepção de Ausubel, para alcançar o fim da aprendizagem seria necessário um trabalho contínuo e sistemático com os conteúdos matemáticos, retomados em cada série, ano a ano.

Com relação ao livro didático, os professores afirmam usá-lo como material de apoio, pois os exercícios do livro não trazem significado para os alunos, uma vez que estes não estão relacionados com algum fato concreto ou ligados ao cotidiano da criança, portanto, elas não conseguem compreender o exercício. Esse raciocínio é contrário ao pensamento de Ausubel, segundo o qual, se as ideias relevantes forem aprendidas com clareza e assim estabelecidas na estrutura cognitiva, os alunos conseguiriam resolver os exercícios propostos pelo livro, pois teriam assimilado o conceito.

Outro ponto que nos chama atenção se refere à parte mais difícil do ensino das frações. Os professores citaram questões variadas, que inclui boa parte do conteúdo, como *interpretação dos problemas de frações*, *frações próprias*, *impróprias*, *mistas*, *equivalentes*, *divisão* e *multiplicação de frações*.

DISCUSSÕES

De posse dos depoimentos, podemos questionar se o professor, ao ensinar frações, compreende o que está ensinando. Será que realmente o aluno tem dificuldades para entender ou será que a forma pela qual ele entende é *interpretada* como errônea pelo professor? Este aluno poderá estar se utilizando de outros caminhos que o levem ao mesmo resultado, se levarmos em conta o conhecimento prévio do aluno como um primeiro momento no processo de aprendizagem.

No que diz respeito ao ensino das frações impróprias, próprias, mistas, divisão e multiplicação de frações, os professores atribuem essa dificuldade ao fato de tais conteúdos não fazerem parte do cotidiano do aluno, reiterando que o abstrato é difícil de ser compreendido. De que maneira tais conteúdos poderiam não fazer parte do cotidiano da criança? Por que, para os professores, a adição, a subtração e até mesmo a equivalência de frações fazem parte do cotidiano enquanto a divisão e a multiplicação não?

O professor não compreende que tudo isso e muito mais pode ter significado para o aluno, mas somente se esta nova informação estiver fazendo relação com o que o aluno já sabe. Ao fazer uso do termo "abstrato", nos parece que os professores se referem a algo que eles próprios não compreendem. Na verdade, o que se percebe, pela fala dos professores nessa questão, é que as dificuldades no ensino das frações (sejam elas mistas ou equivalentes) não são apenas do aluno ao estar aprendendo, mas principalmente dos próprios professores que não compreendem o assunto. E como ensinar algo que não entendem?

Questionamos, então: o que poderia ser feito? Dividir as séries iniciais por área de interesse dos professores? Aumentar a carga horária da disciplina de matemática nos cursos de formação de professores? Inserir formação específica em matemática de 1ª a 4ª série do ensino fundamental nos cursos de formação de professores? Ou ainda disponibilizar outros cursos de capacitação?

Diante disso concluímos que se os próprios professores estão com dúvidas, não é difícil imaginar que os alunos certamente carregarão as mesmas dificuldades. Por isso, ressaltamos aqui a importância crucial de uma boa formação do professor que ensina matemática nas séries iniciais, pois seu compromisso com a educação e a matemática são maiores, uma vez que, nas séries iniciais, a criança desenvolverá a base que a acompanhará por toda a vida.

REFERÊNCIAS

BARALDI, I. M. **Matemática na escola:** que ciência é esta? Bauru: EDUSC, 1999. p. 39 – 63.

BRITO, M. R. F. de.; LIMA, V. S. de. **Psicologia da educação matemática – Teoria e Pesquisa.** Florianópolis: Insular, 2001. p. 107 – 127.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

NEHRING, C. M. **Compreensão de texto:** enunciados de problemas multiplicativos elementares de combinatória. 2001. 186 p. Tese (Doutorado em Educação) – UFSC, Florianópolis, 2001.

TEIXEIRA, L. R. M.; SANTOS, V. de M. Dificuldades de aprendizagem em matemática e formação docente. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VI, 1998, São Leopoldo. **Anais...** São Leopoldo, 1998. p. 345.

CAPÍTULO 08

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA MEDIADAS POR VÍDEO E OFICINA: UMA DISCUSSÃO NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO

Lilian Akemi Kato
Valdinei Cezar Cardoso

INTRODUÇÃO

Um dos desafios atuais da educação matemática, em todos os níveis, é a determinação de estratégias de ensino e aprendizagem que ofereçam instrumentos de ação para que professores e estudantes possam desenvolver-se plenamente durante processo de elaboração do conhecimento.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) apontam que a educação deve ser estruturada em quatro alicerces: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver e aprender a ser. Para a efetivação destes alicerces, no que tange ao ensino de matemática, uma das dificuldades consiste em elaborar mecanismos que permitam a construção individual dos significados dos conceitos científicos pelos estudantes.

Essa discussão, acerca do processo de construção do conhecimento, provoca inúmeras reflexões, de cunhos didático-metodológico, epistemológico, filosófico e psicológico. Interessam-nos, aqui, as discussões dadas no âmbito do ensino da matemática na educação básica, principalmente quando se concebe a matemática no rol das disciplinas nas quais o estudante é desafiado a interpretar e criticar o mundo que o cerca, podendo atuar e inferir sobre ele e não mais somente como um escopo de conhecimentos que deve ser assimilado.

Nesse sentido, a Modelagem, como uma das tendências da educação matemática, proporciona um ensino centrado no processo de elaboração de soluções de problemas, matemáticos ou não, despertando o interesse para o estudo da matemática e promovendo a aprendizagem reflexiva, rompendo, assim, com a concepção do ensino baseado na transmissão de conteúdos.

Trata-se de uma estratégia de ensino que valoriza a criatividade e o trabalho em grupo, visando o desenvolvimento de habilidades para a pesquisa, como a capacidade de levantar e testar hipóteses e, principalmente, de explicitar as relações da matemática com outras disciplinas.

As atividades de Modelagem evidenciam os aspectos interdisciplinares, de modo a motivar os alunos a aplicar a matemática em situações advindas de outras áreas do conhecimento, a fim de atribuir significado aos conceitos matemáticos envolvidos, o que possibilita maior compreensão acerca do problema de estudo, diferente daquela proveniente unicamente do senso comum.

Diversos autores – como Blum (2002); Blomhoj e Jensen (2003); Kaiser *et al.* (2007); Lesh e Doerr (2006), entre outros – defendem a inclusão de atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar, destacando, como um dos seus principais argumentos, a motivação e a preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas.

Neste contexto, o estudo sobre a utilização de diferentes estratégias, como apoio a essas atividades, vem se destacando nas pesquisas mais recentes (principalmente aquelas que abordam o uso de tecnologias), seja como recurso didático ou como material instrucional para professores ou alunos – Jacobini (2003); Prensky (2006); Borba (2001) –, ou ainda frisando a importância da utilização de oficinas e situações experimentais para o ensino e a aprendizagem de matemática – Sriraman e Harry (2004; 2005); Lorenzato (2006).

Neste texto, apresentamos dois exemplos de atividades de Modelagem Matemática mediadas por duas estratégias didáticas de apoio: os vídeos educativos e as oficinas de matemática. Esses dois exemplos oferecem uma gama de possibilidades a professores e estudantes para a inclusão desse tipo de atividade no currículo escolar, apontando, ainda, algumas vantagens da inserção de diferentes tendências da educação matemática, com vistas à

atribuição de significado aos conceitos matemáticos envolvidos, por meio do desenvolvimento de problemas com características interdisciplinares.

A primeira atividade foi desenvolvida com uma turma de estudantes do nono ano do ensino fundamental de uma escola particular da cidade de Goioerê-PR, no ano de 2011. O objetivo foi investigar algumas das potencialidades da utilização de vídeos educativos como instrumento de apoio às atividades de Modelagem Matemática, com vistas à atribuição de significado ao conceito matemático de *função afim*[1].

A segunda atividade foi desenvolvida com um grupo de professores de matemática do Núcleo Regional de Educação de Maringá- PR, também no ano de 2011, durante um curso de formação continuada envolvendo a Modelagem Matemática. Nesta atividade, evidenciamos a construção de modelos matemáticos envolvidos numa oficina de pipas.

Pretende-se, com o relato dessas duas atividades, apresentar a Modelagem Matemática como uma estratégia motivadora para o ensino da matemática, evidenciando a inserção desta disciplina em outros contextos da realidade e apontando a utilização de outros recursos didáticos aliados a essa estratégia – nesses casos, em particular o vídeo e a oficina, instrumentos de apoio que interferem de forma positiva em todo o processo de ensino e aprendizagem.

A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO

A discussão acerca das dificuldades enfrentadas por professores e alunos, em todos os níveis de ensino, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, é um dos principais temas norteadores da educação matemática. Alguns dos resultados das pesquisas nesta área de conhecimento podem ser lidos nos documentos oficiais que orientam o ensino dessa disciplina.

Particularmente, no Estado do Paraná, as Diretrizes Curriculares Estaduais de Matemática (PARANÁ, 2008) sugerem que a prática docente dessa disciplina venha a contemplar o uso das tendências metodológicas da educação matemática, visando o favorecimento da atribuição de significados

[1] Uma função f: IR →IR (f de IR em IR) denomina-se função afim quando há dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$, para todo x pertencente aos números reais.

aos conteúdos matemáticos ensinados, de modo a motivar e facilitar a aprendizagem.

A Modelagem Matemática é uma das tendências da educação matemática, cuja principal característica é a de aproximar os conceitos matemáticos de situações reais, a fim de promover a formação profissional e cidadã dos estudantes. Dentre a multiplicidade de concepções não-excludentes para a modelagem no âmbito da educação matemática, nos valemos da compreensão de Barbosa (2001; 2003; 2007), segundo a qual a atividade de modelagem distingue-se de outras tendências de ensino por um processo investigativo, que não delimita um único caminho a ser trilhado pelo aluno.

> A Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem[2] no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. Então, especificamente, trata-se de uma atividade que convida os alunos a discutirem Matemática no contexto de situações do dia-a-dia e/ou da realidade (BARBOSA, 2001 p. 6).

A importância do ambiente da modelagem para o ensino da matemática extrapola a atribuição de significados aos conceitos matemáticos, contribuindo para que os estudantes construam esses conhecimentos partindo de problemas da realidade. Obtêm-se, assim, que eles sejam capazes de resolvê-los e interpretá-los matematicamente a partir da relação com soluções teóricas suscitadas pela realidade geradora do problema. Neste viés, o mais importante não é a obtenção do modelo matemático, e sim o percurso realizado pelo aprendiz, durante o qual o conhecimento matemático se sistematiza e se aplica, normalmente de forma concisa, clara e sem ambiguidades (BASSANEZI, 2002, p. 16-38).

Neste trabalho, concebemos a Modelagem Matemática como fomentadora do ambiente de aprendizagem a partir da utilização de atividades investigativas, de modo a contemplar situações advindas de outras áreas do conhecimento para o favorecimento da aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos em diferentes situações-problema.

[2] Segundo Skovsmose (2000), "o ambiente é o lugar ou o espaço que cerca e envolve o aluno, ou ainda, as condições nas quais os alunos são estimulados a desenvolver determinados tipos de atividades."

ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA MEDIADA POR VÍDEOS EDUCATIVOS: UM ESTUDO SOBRE A CAPACIDADE AUDITIVA HUMANA

Motivados pela investigação do potencial da utilização de vídeos em aulas de matemática, elaboramos alguns vídeos relacionados ao tema *audição e frequência auditiva*. Os vídeos tinham como objetivo ajudar os estudantes a compreender, utilizando-se de alguns conceitos matemáticos, o sistema auditivo humano e, ao mesmo tempo, investigar os seus conhecimentos relacionados à interpretação de tabelas, à representação gráfica de dados e à obtenção da lei de formação de uma função que representa um gráfico ou uma tabela.

Os vídeos foram elaborados com o auxílio dos programas: *Windows Movie Maker*[3] e *Camtasia Studio 6*[4], por meio dos quais capturamos partes de outros vídeos e imagens disponíveis no site www.youtube.com, a partir dos quais construímos os vídeos utilizados em nosso trabalho. Inserimos em todos os vídeos informações (orais, escritas e pictóricas) que julgamos importantes para que os estudantes se sentissem instigados a participar da atividade de Modelagem Matemática.

Esta atividade, desenvolvida com uma turma do nono ano do ensino fundamental, teve como um de seus objetivos principais investigar os possíveis conhecimentos significativos desses estudantes com relação ao conceito de função afim e a sua importância na compreensão do funcionamento da audição humana.

Iniciamos as atividades apresentando aos estudantes o vídeo 01[5], o qual explica as relações entre a capacidade auditiva humana e as fontes sonoras. Após esta apresentação inicial, programamos um debate, cuja meta era investigar os hábitos diários dos sujeitos quando expostos a diferentes fontes sonoras, além de efetuar o convite para a realização da atividade.

Em um segundo momento, convidamos os aprendizes a desenvolverem uma atividade de Modelagem Matemática dentro desta mesma temática, objetivando identificar o tempo máximo de exposição permitida para diferentes

[3] Disponível em: http://www.microsoft.com.

[4] Disponível em: http://www.camtasiasoftware.com/camtasia-us/index-camtasia6.php.

[5] Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=lyixibXtpo0.

ruídos comuns no cotidiano das pessoas. Esta atividade foi mediada por dois vídeos, de aproximadamente 10 minutos cada, ambos produzidos exclusivamente para esse fim. Durante toda a atividade os alunos tiveram a orientação do professor.

O vídeo 02[6] apresenta diversos exemplos de ruídos conhecidos pelos estudantes, com seus respectivos níveis sonoros em decibéis[7], e o tempo máximo de exposição permitido desses sons de forma a evitar quaisquer problemas de saúde no sistema auditivo. A Tabela 01 apresenta os dados apresentados no vídeo 02.

Tabela 01 – Tempo máximo de exposição em função do nível sonoro

Nível sonoro (dB)	Tempo máximo de exposição (em horas por dia)
80	8
90	4
95	2
100	1

Fonte: os autores

O vídeo 03[8] apresenta explicações sobre como proceder para construir um modelo matemático que relaciona essas duas variáveis: nível sonoro e tempo de exposição permitido.

Para que a compreensão matemática acerca da situação apresentada fosse significativa, a tarefa exigia o registro dos dados da Tabela 01 e sua tradução para a linguagem matemática, naquilo que é denominado *Modelo Matemático*.

O vídeo 03 explica, detalhadamente, os passos a serem executados para a obtenção do Modelo Matemático da situação em discussão. Assim, após assistirem essa mídia os estudantes desenvolveram a atividade proposta em seus cadernos, alguns seguindo os mesmos passos indicados no vídeo e outros procedendo de forma independente, embora seguindo a instrução apresentada.

Desse modo, utilizando os dados da Tabela 01, os estudantes construíram um modelo matemático para representar o tempo de exposição em função do nível sonoro. Este modelo foi então testado em diferentes situações, o que

[6] Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=HxWAnDHIdkw.

[7] A intensidade ou volume dos sons é medida em unidades denominadas *decibéis* (dB).

[8] Disponível em : http://www.youtube.com/watch?v=CXlE7ygmSXg.

fez com que eles descobrissem quais os tempos máximos de exposição para diversos níveis sonoros.

Tal construção permitiu aos sujeitos inferirem sobre os possíveis motivos que levaram alguns membros de suas famílias (pais, avós, tios) a apresentarem perda auditiva. Alguns estudantes comentaram que seus parentes trabalharam durante muito tempo operando máquinas agrícolas ou industriais, contexto no qual provavelmente os níveis sonoros estavam acima do indicado pela Organização Mundial da Saúde (em relação ao tempo de exposição), o que pode ter lhes causado a perda auditiva.

Terminada a investigação desse problema, apresentamos o vídeo 04[9], que trata da relação entre as idades das pessoas e as frequências sonoras que elas conseguem captar. Esse vídeo despertou a curiosidade dos estudantes, porque eles descobriram que há frequências auditivas que os adolescentes ouvem e que os adultos não conseguem detectar. Para instigar ainda mais o interesse do grupo, propusemos um teste[10], durante o qual os estudantes puderam avaliar suas capacidades auditivas para diferentes frequências sonoras.

Após a investigação inicial os estudantes deveriam analisar o problema matematicamente, buscando representar o fenômeno estudado em linguagem matemática e a posterior validação desse modelo para diferentes situações. A Tabela 02 apresenta dados referentes à frequência auditiva correspondente a algumas faixas etárias de seres humanos, apresentados no vídeo 04 por meio de exemplos e imagens.

Tabela 02 – Frequência auditiva relacionada com algumas faixas etárias

Faixa etária (em anos)	Frequência (em khz)
18 – 24	16
30 – 39	14 – 15
40 – 49	12
50 – 59	11

[9] Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=aM4VNDSuWd0.

[10] www.mundoeducacao.com.br/matematica/medindo-intensidade-dos-sons.htm.

Após a discussão sobre o significado das informações contidas na Tabela 02, os estudantes perceberam que precisavam escolher um determinado valor específico da idade, em cada faixa etária, para que pudessem construir um modelo matemático que relacionasse cada idade com sua respectiva frequência auditiva. Como o intervalo entre as idades escolhidas, em cada faixa etária, deveria ser igualmente espaçado, os estudantes adotaram os seguintes dados para as idades: 20, 30, 40 e 50, conforme apresentado na Tabela 03.

Tabela 03 – Idades escolhidas para cada uma das frequências auditivas

Faixa etária (em anos)	Frequência (em khz)
20	16
30	14
40	12
50	11

O vídeo 04 explica os procedimentos a serem adotados por estes sujeitos até o momento da montagem da Tabela 03. A partir deste ponto, os estudantes deixavam de contar com o auxílio do vídeo e tinham que construir seus modelos matemáticos de forma individual.

Os 19 estudantes que participaram desta atividade construíram modelos matemáticos para analisarem o problema, seguindo os encaminhamentos vistos na primeira atividade. Os modelos construídos pelos estudantes, aqui identificados por V1, V2, V3, ..., V19, estão indicados na Tabela 04.

Tabela 04 – Modelos matemáticos válidos encontrados pelos estudantes

Estudantes	**Modelo matemático construído**
V1, V5, V6, V8, V9, V10, V11, V16 e V18	$f(x) = -0{,}2x+20$
V17	$f(x) = -5x+100$

Para a construção dos modelos apresentados na Tabela 04 os estudantes primeiramente determinaram as variáveis independente e dependente, denominando-as por “x” e “$f(x)$”. A expressão para $f(x)$ foi determinada escolhendo-se dois pontos do gráfico e determinando-se a equação da reta que passa por eles, conforme instruído no vídeo 03.

Todos os estudantes, com exceção de V2, V3, V4, V12 e V17, escolheram a frequência auditiva em quilohertz[11] como variável dependente e a idade como variável independente, obtendo-se os modelos apresentados na Tabela 04. No entanto, apenas V1, V5, V6, V8, V9, V10, V11, V16, V17 e V18 construíram modelos válidos para os dados do problema. Os demais, embora tenham construído modelos que representam uma reta, não satisfizeram as condições do problema. De forma geral, esses estudantes cometeram erros algébricos no desenvolvimento das operações matemáticas envolvidas.

No modelo construído pelo aluno V17, $f(x)$ representa a idade, em anos, para cada frequência x em quilohertz. Por exemplo, para $x= 16$ quilohertz, tem-se, segundo esse modelo, $f(x)=-5 .(16) +100 =20$ anos.

As dificuldades e os resultados encontrados durante a aplicação da pesquisa, tanto por parte dos estudantes quanto por parte dos professores, indicam que os vídeos podem ser utilizados como motivadores de atividades no ambiente da Modelagem Matemática, caracterizando-se como materiais didáticos potencialmente significativos, capazes de atuar como organizadores prévios de conhecimentos matemáticos.

Neste sentido, a utilização dos vídeos, como auxiliares na construção de significados, contribui para a aproximação entre o pensamento abstrato e a experiência, proporcionando ao estudante situações nas quais é fundamental refletir e desenvolver estratégias para que seja possível representar e interpretar seu cotidiano por meio de modelos matemáticos.

Tais estratégias seriam construídas quando os indivíduos têm contato com informações disponibilizadas pelos professores, por computadores e pela *Internet*, lembrando que o significado é atribuído a partir de conhecimentos anteriormente construídos. Para Ausubel (2002, p. 86), o processo de construção do conhecimento envolve a interação entre o novo conceito a ser aprendido e os significados anteriormente construídos e incorporados pelo sujeito. Nas palavras de Ausubel (2002),

> o facto de uma determinada operação intelectual envolver um conteúdo imediato de consciência (percepção), por um lado, ou processos

[11] Segundo o dicionário *online*, quilohertz é uma unidade usada para medir frequências de muitos tipos de ondas, como as ondas de rádio e as sonoras. Para mais detalhes ver http://www.dicio.com.br/quilohertz/.

> intelectuais (cognição) mais complexos e diferidos, por outro, depende, em grande parte, da complexidade da tarefa de aprendizagem em relação à maturidade cognitiva do aprendiz e do facto de o novo material só estar a ser apreendido nessa altura ou *já* ser significativo (AUSUBEL, 2002, p. 86).

Pensando nisso, elaboramos atividades que utilizassem conhecimentos prévios dos estudantes, uma vez que, pelo programa curricular da disciplina de matemática na escola envolvida na pesquisa, os estudantes já tinham estudado os conceitos de função afim, de construção de tabelas e gráficos e de resolução de sistemas de equações polinomiais do primeiro grau, todos necessários para a realização das atividades propostas em nosso trabalho.

Durante as aulas mediadas por vídeos educativos, notou-se que a maioria dos estudantes já possuía alguma experiência de estudo/pesquisa com algum conteúdo de matemática pela *Internet*, o que nos indicou que a utilização de vídeos nas aulas não foi uma dificuldade.

Além disso, os vídeos proporcionaram aos alunos certa autonomia para resolverem as situações-problema propostas nas atividades. Eles entenderam a ideia da solução apresentada nos vídeos, mas também entenderam que era possível chegar a uma solução por outros caminhos, isso, a nosso ver, é um ponto positivo, pois acreditamos que os vídeos podem ter ajudado os estudantes a tomar decisões criativas para solucionar as situações propostas.

De um modo geral, foi possível observar, pelos comentários e pelos procedimentos utilizados durante a execução das tarefas, que todos os alunos envolvidos no trabalho compreenderam a ideia das atividades propostas.

ATIVIDADE DE MODELAGEM MEDIADA POR UMA OFICINA DE MATEMÁTICA: MODELOS MATEMÁTICOS PARA A CONSTRUÇÃO DE PIPAS

De acordo com a Enciclopédia Britânica[12], as pipas (ou *kites* em inglês) nasceram na China antiga, por volta do ano 3.000 a.C. Desde então são utilizadas para diversas finalidades. Entre elas, podemos destacar o uso como

---

[12] ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. *Kite*. Encyclopædia Britannica Online Academic Edition. Disponível em: <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/319666/kite>. Acesso em: 21 abr. 2014.

sinalizador militar, medidor das condições atmosféricas, a participação na invenção do para-raios e, até os dias de hoje, é um brinquedo bastante popular entre crianças de todo o mundo.

As pipas, também denominadas de estrela, papagaio, pandorga ou raia, são brinquedos que voam. Seu voo é consequência da força de oposição que o vento provoca na pipa, que é sempre controlada pelo seu operador. A composição básica de uma pipa é uma estrutura armada que suporta um plano de papel que funciona como uma asa.

Conhecendo essas características, propusemos uma oficina com o objetivo de construir pipas planas que necessitassem de uma rabióla para voar, utilizando-se de conceitos matemáticos envolvidos nesse modelo.

O objetivo desta oficina foi capacitar professores para o desenvolvimento de modelos matemáticos envolvidos na construção de pipas, com o intuito de promover diferentes compreensões acerca do processo de construção cognitiva dos conceitos geométricos em estudantes com idade média entre 11 e 13 anos. O desenvolvimento cognitivo em Geometria, na maioria dos estudantes, se encontrava nos níveis 1 e 2, segundo uma escala que vai do nível 0 até o nível 4, criada pelos pesquisadores Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, da Universidade de Utrecht.

Segundo os autores, há cinco níveis de compreensão em geometria, a visualização, a análise, a dedução informal, a dedução formal e o rigor. Tais níveis foram construídos no decorrer de vários anos de experiências dos Van Hiele em ambientes educacionais. O modelo afirma que o aluno se move sequencialmente a partir do nível inicial (visualização) até o nível mais elevado (rigor). Poucos alunos alcançam o último nível (LINDQUIST; SHULTE, 1994).

A atividade, desenvolvida com um grupo de professores da educação básica, iniciou-se com um questionamento sobre os entes geométricos constituintes de uma pipa. Embora este artefato fosse do conhecimento de todos os professores, essa questão gerou discussões diversas sobre as formas geométricas que estão presentes na pipa, como, por exemplo, formas triangulares, retangulares, simetrias axiais e regiões poligonais.

Figura 1 – Exemplo de uma pipa construída com três varetas de bambu

O material mínimo necessário para a montagem de uma pipa é: 10 metros de linha fina, uma folha de papel de seda colorido, um tubo de cola branca escolar, uma tesoura sem ponta, três varetas de bambu com o tamanho desejado e uma régua.

A montagem da pipa, nesta oficina, seguiu as etapas da Modelagem Matemática[13], objetivando tanto a atribuição de significados aos conceitos matemáticos envolvidos no problema, quanto a compreensão dos mecanismos de funcionamento de uma pipa.

Assim, iniciamos a atividade pelo levantamento de hipóteses relacionadas com a construção da pipa. Nessa fase, incentivamos os participantes a identificarem e representarem os principais elementos constituintes dessa pipa em linguagem matemática, comprimento das varetas, a área de cada uma das partes planas da pipa, entre outros aspectos, discutindo, com os demais participantes, as possibilidades de ganho ou perda de materiais em função das hipóteses levantadas.

Partindo dessa discussão, os construtores das pipas puderam escolher entre manter suas hipóteses ou modificá-las, sempre fazendo tais inferências em linguagem convencional (por exemplo, a língua portuguesa), e em linguagem matemática, com um nível gradual de rigor, que deve obedecer ao tempo de aprendizagem de cada pessoa.

[13] Segundo Biembengut e Hein (2000, p. 13), a Modelagem Matemática passa pelas seguintes etapas: interação com a situação, matematização do problema e construção do modelo matemático correspondente.

Além disso, para promover a construção de conceitos geométricos durante a confecção de pipas, foi fundamental instigar a curiosidade dos construtores por meio de questionamentos e instruções, como apresentado no exercício a seguir:

Faça um desenho representando a sua pipa e represente nele todas as informações necessárias para a sua confecção, como medidas, tipos de materiais utilizados em cada parte da pipa, locais onde devemos encapar a estrutura de bambu utilizando o papel de seda e a localização de regiões onde não se encapa a estrutura com o papel.

De acordo com Lindquist e Shulte (1994, p. 7), perguntas como as que seguem podem ajudar os construtores a compreender características das formas geométricas:

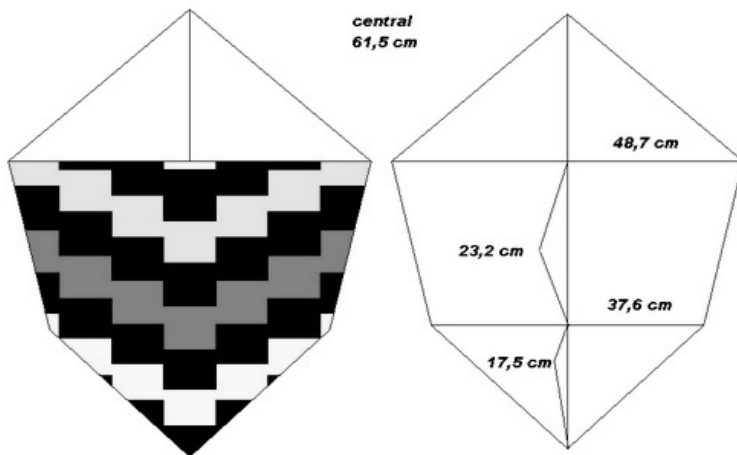
> Que tipo(s) de figuras você obterá se cortar o canto segundo um ângulo de 30°? E segundo um ângulo de 45°? Descreva os ângulos no ponto de interseção das diagonais. O ponto de interseção está em que ponto das diagonais? Por que a área do losango é dada como metade do produto das duas diagonais?

A representação do esquema da pipa e a sua construção atuaram como modelos por meio dos quais os sujeitos envolvidos puderam levantar hipóteses que os levassem à discussão dos melhores métodos para que se utilizasse uma quantidade mínima de materiais, mas de modo que a funcionalidade da pipa não fosse perdida.

A quantidade de papel utilizada na pipa poderia ser estimada pelo seu construtor, que também poderia estimar a quantidade de linha necessária para a construção dessa estrutura armada com bambu. A Figura 2 ilustra essas estimativas.

Além disso, seria possível solicitar que os participantes da oficina construíssem uma pipa com o formato de um losango e com as diagonais iguais, ou outra pipa com quatro ângulos retos, depois com três ângulos retos, dois ângulos retos ou um ângulo reto. Dessa forma, tais sujeitos poderiam construir noções geométricas ao descobrirem, por seus próprios meios, os caminhos para concluir as tarefas solicitadas.

[14] SÃO PAULO PIPAS. **Pipas Natal.** Blog de pipas. Disponível em: <http://saopaulopipas.wordpress.com/pipas/natal/>. Acesso em: 27 jul. 2011.

Figura 2 – Estimando a quantidade de papel e de linha para a confecção da pipa[14]

Após a fase do levantamento de hipóteses iniciamos a etapa da generalização do problema. Para isso, solicitamos aos construtores das pipas que apresentassem para o restante do grupo os procedimentos adotados por eles para a realização das tarefas, como, por exemplo, a estimativa da quantidade de papel e de linha necessários para a construção da pipa.

Neste momento, promovemos um debate por meio da Modelagem Matemática, cujo objetivo era confrontar as diversas hipóteses, instigando os sujeitos a sua formulação e validação, para verificar se satisfaziam a condição de mínimo gasto de papel e de linha na confecção da pipa.

A Tabela 5 apresenta um dos modelos matemáticos construídos pelos professores durante a participação em nossa oficina.

Tabela 05 – Exemplo de um modelo matemático para a construção da pipa

Modelo matemático que representa:	
A área da pipa	O perímetro da pipa
$f(x) = 91{,}5x - 644{,}25$	$f(x) = 11x - 98{,}5$

Na Tabela 5, a sigla *f(x)* indica na primeira coluna a área da pipa e na segunda o perímetro da pipa. Nos dois casos, a variável "*x*" denota a distância entre as varetas horizontais da pipa.

Para construir estes modelos, os professores, reunidos em equipes de cinco pessoas, construíram uma pipa para cada um dos participantes do grupo. Foi-lhes imposta a condição de que a disposição das varetas em cada uma das construções fosse diferente. Assim, cada participante construiu uma estrutura diferente para a sua pipa.

Terminada a fase da montagem da estrutura da pipa, os participantes determinaram, utilizando uma régua, a distância entre as varetas horizontais, o perímetro e a área de cada uma das pipas. Estes dados foram organizados em uma tabela. A partir deles, construíram-se os modelos matemáticos apresentados na Tabela 5.

Os modelos matemáticos constantes nessa tabela poderiam ser utilizados para estimar a área e o perímetro de uma pipa para diferentes distâncias entre as varetas horizontais. A vantagem de se utilizar um modelo matemático nesse caso está no fato de que, desse modo, os sujeitos não precisariam construir uma infinidade de pipas para determinar as suas áreas e perímetros, bastaria utilizar o modelo matemático a fim de estimar a área ou o perímetro para cada pipa que poderia ser construída, dependendo da situação investigada.

Foi oportuno, nesta fase, apresentar e discutir os conceitos de *função*, *função polinomial* e *pontos críticos de uma função*. Esta apresentação foi feita na forma de questionamentos aos participantes, pedindo-lhes que descrevessem as variáveis do problema e as leis de formação das funções área e *perímetro* da pipa, além da representação destas funções por meio de gráficos.

Para Lindquist e Shulte (1994, p. 10), atividades manipulativas, como a construção de pipas, promovem situações para a realização de medidas, dobras e recortes. Tais procedimentos seriam auxiliares na tarefa de "identificar propriedades de figuras e outras relações geométricas".

Além disso, procedimentos como descrever figuras, compará-las, classificá-las por atributos isolados (número de lados, ângulos retos), desenhar e identificar uma figura somente através da descrição oral ou escrita de suas propriedades, identificar uma figura a partir de pistas visuais e deduzir empiricamente (a partir do estudo de muitos exemplos) "regras" e generalizações. Todas essas atividades poderiam ajudar os sujeitos a diferenciarem as características das

figuras geométricas, mesmo que ainda não pudessem relacionar as propriedades de diferentes figuras e não compreendessem adequadamente as definições apresentadas. A construção de pipas planas seria um caminho para que tais sujeitos realizassem todas as tarefas indicadas anteriormente de uma forma lúdica e prazerosa.

As tarefas citadas anteriormente fazem parte, segundo os pesquisadores Van Hiele, do nível de desenvolvimento 1. Para desenvolver esquemas classificados no nível 2, de acordo com Lindquist e Shulte (1994), é necessário que se promovam atividades a fim de identificar conjuntos mínimos de propriedades capazes de descrever uma figura, por exemplo, uma questão que auxiliaria neste processo seria: “um quadrado é....”, e o participante da oficina escreveria tudo que sabe sobre o quadrado, expondo suas ideias para o grande grupo. Isso poderia ser feito com uma pipa com o formato *quadrado*, a partir da qual o sujeito explicaria as propriedades nela presentes.

Em nossa oficina acompanhamos os argumentos apresentados pelos sujeitos, que em muitos casos eram informais, tentando fornecer à turma explicações não prontas. Buscamos promover, a partir dessas ideias, discussões que pudessem levar o grupo ao desenvolvimento de argumentos formais. Isso foi feito discutindo-se as afirmações de cada sujeito e suas recíprocas.

Desse modo, utilizamos os materiais presentes na oficina de pipas com o objetivo de preparar os professores para o ensino e a aprendizagem posterior de outros conceitos geométricos, por meio das discussões geradas durante a construção das pipas. Também avaliamos a compreensão de conceitos geométricos pelos professores, discutindo, de forma democrática, como tal avaliação poderia ser feita quando os professores estivessem ministrando essa oficina em suas salas de aula.

Por meio dessa oficina, também foi possível analisar a linguagem utilizada por estes sujeitos para defender suas ideias e pontos de vista. Tal procedimento evitou o ensino mecânico da geometria, que pode ser encontrado com muita frequência em diversas escolas brasileiras.

Para Lindquist e Shulte (1994), a linguagem e os materiais escolhidos com critérios bem definidos auxiliam no desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Tal desenvolvimento é favorecido com a utilização de discussões orientadas que levem os sujeitos a associar linguisticamente palavras e símbolos geométricos criados por eles, que gradualmente serão substituídos por expressões eruditas que obedeçam ao rigor necessário da geometria enquanto ciência.

A construção de pipas para estudar geometria muda também a forma de avaliação a ser adotada pelo professor, já que, por meio de conversas, os professores podem descobrir concepções erradas ou noções incompletas, bem como construir noções corretas – neste ponto, os questionamentos utilizados pelo professor são fundamentais para a orientação dos estudantes. Vale ressaltar que Lindquist e Shulte (1994) afirmam que é importante em todas as etapas perguntar à criança como ela "sabe".

Além disso, para que a avaliação do processo tenha efeitos positivos sobre a aprendizagem dos estudantes, cabe ao professor formular questões apropriadas, dando tempo suficiente para as respostas e sempre discutindo a qualidade das respostas apresentadas. (LINDQUIST; SHULTE, 1994, p. 17).

Na etapa final da oficina de pipas os professores puderam testar cada uma das leis de formação adotadas e analisar se o modelo matemático representava o modelo real de forma satisfatória.

O resultado final foi que os professores se sentiram autores de seus próprios modelos matemáticos. Becker (1993), comentando as ideias de Piaget, fornece o seguinte exemplo: quando uma criança interage com uma árvore, primeiro ela vê a árvore e sobe nela, só depois disso ela começa a perceber suas características, como o verde de suas folhas. Com a pipa ocorreria um fenômeno semelhante, no início, os construtores percebem somente a pipa, somente durante a sua construção e por meio do encaminhamento do professor é que estes percebem as características geométricas presentes neste artefato.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O interesse dos professores por atividades práticas que possam contribuir no processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos vêm aumentando a cada ano, reflexo da disseminação dos cursos de capacitação ou formação continuada de professores, resultante, por um lado, do incentivo ao plano de

carreira da profissão, e por outro, da própria consciência do professor acerca do seu papel na formação das novas gerações. Nesse sentido, acreditamos que uma oficina é um momento oportuno para que a criatividade, a discussão e a manipulação de materiais (sempre com objetivos instrucionais) se façam presente.

No entanto, muitos professores de matemática ainda parecem compreender as atividades manipulativas somente como uma atividade lúdica e sem fins educacionais, fato que é percebido por seus alunos ao conceberem esta atividade como simples recreação.

Com o intuito de romper com esse paradigma, privilegiando as atividades práticas nas quais os conhecimentos teóricos possam ser consolidados, apontamos caminhos que sugerem possibilidades de investigações matemáticas, em busca de generalizações e da compreensão do mundo que nos cerca.

Esta compreensão pode ser alcançada modelando-se matematicamente os problemas do cotidiano. Tanto a oficina quanto os vídeos educativos oportunizam diversas situações para exercitar esta capacidade, proporcionando a reflexões sobre a utilização da Modelagem Matemática enquanto um caminho para aproximar a realidade da teoria.

No entanto, a adoção de estratégias diferentes daquelas características da aula tradicional provoca, ainda, certo nível de insegurança entre professores e alunos. A ansiedade diante de situações novas ou inesperadas, para as quais ninguém está totalmente preparado, pode tornar-se um dos empecilhos para esta prática em sala de aula.

Nesse sentido, destacamos as contribuições deste trabalho para incentivar e provocar reflexões acerca das possibilidades da inclusão de outros recursos didáticos nas aulas – no caso, vídeos educativos e oficinas de Matemática – que envolvam ou não a Modelagem Matemática, bem como as significativas consequências no processo de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção do conhecimento:** uma perspectiva cognitiva. Tradução Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino.** São Paulo: Contexto, 2000.

BLOMHOJ, M.; JENSEN, T. H.. Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning**. Teaching Mathematics and its applications,** v. 22, n. 3, p. 123-139, 2003.

BLUM, W. ICMI Study 14: Applications and modeling in mathematics education – discussion document**. Educational Studies in Mathematics**, v. 51, p. 149-171, 2002.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, Secretaria de Educação Fundamental, Brasília. MEC/SEF, 1998.

LESH, R., DOERR, L. M. Symbolizing, Communicating, and Mathematizing: Key Components of Models and Modeling. In: COOB, P.; YACKEL, E.; MCCLAIN, K. (Ed.). **Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design**. Routledge: Taylor & Francis, 2006.

LINDQUIST, M. M., SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria.** São Paulo: Atual, 1994.

KAISER, G., SRIRAMAN, B., BLOMHOJ, M., GARCIA, J. Differentiating perspectives and delineating commonalties: Report from the Working Group Modeling and Applications. IN: EUROPEAN CONGRESS ON MATHEMATICS EDUCATION (CERME), V, 2007, Larnaca**. Proceedings...** feb. 2007.

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas: Autores Associados. 2006.

PARANA, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares Estaduais para Educação Básica** – Matemática. 84 p. SEED. Curitiba. 2008.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema.** São Paulo, ano 13, n. 14, 2000.

SRIRAMAN, B., HARRY, A. The Pedagogical Value and the Interdisciplinary Nature of Inductive Processes in Forming Generalizations**. Interchange**: A Quarterly Review of Education, v. 35, n. 4, p. 407-422, 2004; 2005.

CAPÍTULO 09

RELAÇÕES ENTRE A CONCEITUAÇÃO DA ESTRUTURA DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E AS OPERAÇÕES COGNITIVAS DE PRODUÇÃO, TRATAMENTO E CONVERSÃO COM REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DO NÚMERO: A PALAVRA E A ESCRITA ARÁBICA

Celia Finck Brandt
Méricles Thadeu Moretti

INTRODUÇÃO

Um sistema de numeração não é universal e nem único. O que o caracteriza é ser resultado da produção humana. Sendo inventado, é necessário entender a sua estrutura, a qual pode apresentar base e/ou valor posicional, expressos ou explicitados diferentemente e com maior ou menor transparência nos diferentes registros de representação do número dentre os quais se destaca o numeral arábico e os nomes atribuídos aos números. O sistema de numeração que se tornou hegemônico foi criado pelos hindus e divulgado pelos árabes, sendo, por isso, denominado *indo-arábico*. Esse sistema possui uma estrutura composta pela base dez e pelo valor posicional, cuja aprendizagem não se resume nem se reduz a uma simples transmissão, apesar da natureza arbitrária de seus elementos constituintes, isto é, a base e o valor posicional, visto que esses elementos são articulados por meio de operações matemáticas, gerando um novo objeto matemático a ser ensinado/aprendido.

Diversas pesquisas – Kamii (1990, 1992, 1995, 1996); Teixeira (1996); Lerner e Sadovski (1996); Fayol (1996); Brizuela (1998); Fuson e Kwon (1991);

Brandt (2002) – apresentam resultados que indicam dificuldades para a aprendizagem da estrutura do Sistema de Numeração Decimal Posicional (SND), observadas em procedimentos de escrita ou interpretação de numerais arábicos, ou também na realização de operações matemáticas de adição, subtração, multiplicação e divisão com a utilização de algoritmos, caracterizadas por mera reprodução de passos ou de instruções apresentadas pelo professor.

Alguns desses resultados mostram que as crianças realizam essas operações com a utilização dos algoritmos, mas não sabem justificar por que "vai um", por que se "afasta uma casa" na multiplicação por dois algarismos, por que ao "emprestar um" para um algarismo da direita este se torna maior em dez unidades, por que o algarismo posicionado à esquerda é dez vezes maior que o algarismo localizado imediatamente a sua direita no numeral arábico, entre outras questões. Na escrita de numerais arábicos, são cometidos erros de natureza sintática, como, por exemplo, escrever 2000300401 para representar o número 2341 ou de natureza léxica, como por exemplo, escrever 13 para representar o número 31 (erro de pilha), entre outros.

Pelas razões acima expostas, escolhemos, na presente investigação, a estrutura do SND como objeto de investigação, em relação ao qual se levanta a seguinte problemática: como possibilitar a compreensão dos conteúdos de registros de representação do número (palavra e numeral arábico) e a identificação da estrutura do SND presente em tais registros?

Buscamos, também, responder as seguintes indagações: quais são as questões inerentes às operações de produção, tratamento e conversão específicas para possibilitar a identificação da estrutura do SND na palavra e no numeral arábico que constituem registros de representação semiótico do número? Como levar em conta essas questões no processo de ensino que objetiva a aprendizagem do SND?

Pretende-se com a presente investigação: 1) apresentar as questões relevantes referentes ao par conceituação/representação, de modo a subsidiar ações voltadas à superação das dificuldades dos alunos e à ressignificação dos registros de representação de quantidades; 2) identificar, por meio de análise e estudo, os padrões de organização do numeral arábico e da palavra que expressa

o número, com o objetivo de apontar de que forma a estrutura do SND está neles explicitada, tornando mais ou menos facilitada a sua aprendizagem, a sua compreensão e a sua consequente atribuição de significado por sujeitos aprendentes; e 3) apontar a forma como se deve levar em conta esses padrões e essas explicitações nas operações cognitivas de produção, tratamento e conversão de registros de representação semióticos do número (em especial a palavra e o numeral arábico) presentes em dado momento da aprendizagem durante o processo de ensino.

Os subsídios teóricos que sustentam e fundamentam nossas análises foram angariados em teorias de representação semiótica, em especial nas ideias de Raymond Duval, autor que destaca a importância do par *noésis/semiósis* para a conceitualização dos objetos matemáticos e das operações cognitivas de formação, tratamento e conversão realizadas com registros de representação semióticos.

Organizamos a apresentação dos resultados dos estudos realizados na presente investigação em quatro partes: a primeira contém pesquisas que apresentam os padrões de organização da palavra e do numeral arábico; a segunda expõe o papel de uma teoria de representações para a conceitualização da estrutura do SND; a terceira explicita os procedimentos metodológicos a serem adotados para contemplar as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão com registros de representação semióticos do número - a palavra e o numeral arábico - no processo de ensino, voltados à aprendizagem da estrutura do SND; a quarta apresenta as considerações finais e contempla os resultados encontrados, servindo, dessa forma, para apresentar respostas às questões levantadas, de modo a enfrentar a referida problemática.

RESULTADOS DE ESTUDOS SOBRE PADRÕES DE ORGANIZAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DO NÚMERO: A PALAVRA E O NUMERAL ARÁBICO

Há que se concordar com Fayol (1996), que afirma ser necessária a criação de um sistema de denominação numérica para estabelecer o valor cardinal de uma coleção de natureza discreta, por enumeração, desde que o mesmo exprima a numerosidade subjacente da coleção. Este problema poderia ser

resolvido de uma forma fácil, bastando, segundo o autor, uma lexicalização direta, isto é, um nome para cada número, que se tornaria limitado por razões de economia de tratamento. Essa limitação só pode ser superada a partir da criação de um sistema de numeração para a constituição de registros de números que expressam a medida de conjuntos. Torna-se necessário, então, a partir disto, conhecer e entender os padrões de organização de sistemas de numeração criados para representar quantidades, expressos em registros de representação, quer sejam palavras ou numerais arábicos.

Um estudo de Fuson e Kwon (1991) contribui com essa questão ao apresentar uma comparação entre as palavras-números criadas pelos europeus, as quais utilizam o SND e são irregulares até cem, e as criadas pelos asiáticos, também utilizando o SND, mas que são, ao contrário, totalmente regulares. Os autores indicaram, em ambos os casos, a maneira como as palavras são ligadas aos números.

Após uma análise dos resultados apresentados pelos autores, pode-se afirmar que, até a quantidade dez, não há diferença entre os europeus (franceses) e os asiáticos, no sentido de ser necessário memorizar os nomes das palavras criadas para representar os números que expressam as quantificações, a serem recitados numa seqüência pré-estabelecida (isto é válido também para os ingleses até a quantidade doze). Porém, a partir destas quantificações, percebe-se uma regularidade nas palavras utilizadas pelos asiáticos para as quantificações de um outro intervalo numérico, do onze ao dezenove. Para estes números os asiáticos utilizam as mesmas palavras já criadas, elas são repetidas de forma combinada para nomear os números até o dezenove.

Para a organização das palavras que expressam os números de 11 a 19, basta a utilização da palavra dez (à esquerda) seguida de uma das palavras representativas dos valores de 1 a 9 (à direita). O número representado é obtido através da soma dos valores numéricos expressos por essas palavras.

A mesma lógica é utilizada para a organização do numeral arábico que expressa o número: um dos algarismos criados para representar os números de 1 a 9 é colocado, na vertical, abaixo do algarismo criado para representar o dez, de modo a se obter os números de 11 a 19.

yi	um	shier→12
er	dois	
son	três	
si	quatro	shisi→14
wu	cinco	
.		
.		
.		
Shi	dez	

No entanto, este não é o caso para as palavras criadas por franceses e ingleses. Para os franceses, existem palavras específicas para nomear os números de onze a quinze, compostas de prefixos e sufixos ligados entre si por uma adição dos valores numéricos por eles representados. Esses prefixos e sufixos, por sua vez, são deformações das palavras criadas para os números de um a nove. Assim "douze" é uma palavra composta pelo prefixo "*dou*" (que constitui uma deformação da palavra criada para representar o dois, "deux") e pelo sufixo "*ze*" (que constitui uma deformação da palavra criada para representar o dez, "dix").

Pode-se exemplificar essa lógica com algumas palavras da língua portuguesa, que, nesse intervalo, seguem a mesma regra: para os prefixos, há a utilização das sílabas "*on*","*do*"," *ter*", "*quator*", "*quin*"; e para o sufixo, a utilização da sílaba "*ze*", deformações, respectivamente, das palavras criadas para um, dois, três, quatro, cinco e dez. Nessa organização o prefixo e o sufixo são ligados por

uma adição dos valores numéricos por eles representados. Do dezesseis até o dezenove, a ordem inverte: o prefixo representa dez e os sufixos representam os número de um a nove, sem deformações. Os prefixos e sufixos também são ligados por uma adição dos valores numéricos por eles representados.

*on*ze = um mais dez → 11 = 10 + 1.... até *quin*ze
*dez*esseis= dez mais seis → 16 = 10 + 6 ... até *dez*enove

A mesma estrutura está presente no sistema inglês, mas a partir do treze até o dezenove. Esse padrão de organização pode ser igualmente comparado com o numeral arábico e permite explicitar a irregularidade oriunda tanto da deformação dos prefixos como da ordem em que se apresentam na palavra, que é diferente da ordem em que se apresentam os mesmos valores no numeral arábico. Essas irregularidades acabam por ocultar a numerosidade subjacente, impedindo o reconhecimento da estrutura do SND na palavra e no numeral arábico. Por isso, é preciso levar em conta, nas operações cognitivas de produção, o tratamento e a conversão com registros de representação semióticos do número.

Para as demais palavras, diferentemente dos asiáticos, utiliza-se também o princípio multiplicativo, mas não de forma tão explicitada. Como exemplo, o Quadro 1 apresenta alguns valores comparativos entre 10 e 90.

Para os asiáticos, as mesmas dez palavras voltam a ser utilizadas para a designação das palavras que representarão dezenas exatas, com utilização, agora, da operação de multiplicação: "er shi" significará dois dez e estará representando 20 unidades. O numeral arábico acompanha esta formação incorporando uma nova regra para a sua própria formação: se o algarismo de menor valor estiver acima do dez, ele o multiplicará; se estiver abaixo dele, será somado. A palavra segue a mesma regra de formação, colocando-se os algarismos à direita e à esquerda do dez. Exemplificando: "er shi" é vinte e "shi er" é doze. Na numeração arábica tem-se:

Quadro 1 - Comparação entre registros de representação do número com a utilização do numeral arábico e da palavra

chinês-japonês			inglês	francês	
十	10	shi 1 palavra 1 símbolo	ten	dix	1 sílaba 2 algarismos
二十	20	er shi 2 palavras 2 símbolos	twenty	vingt	sufixo e prefixo 2 sílabas 2 algarismos
三十	30	son shi 2 palavras 2 símbolos	thirty	trente	sufixo e prefixo 2 sílabas 2 algarismos
四十	40	si shi 2 palavras 2 símbolos	forty	quarante	sufixo e prefixo 3 sílabas 2 algarismos
五十	50	wu shi 2 palavras 2 símbolos	fifty	cinquante	sufixo e prefixo 3 sílabas 2 algarismos

Fonte: os autores

Na nossa língua essas regras de formação não estão explicitadas nas palavras que designam os números de 11 a 19 e as dezenas, não da mesma forma como estão na organização das palavras-números de origem asiática. A palavra doze, por exemplo, dissílaba, não deixa explicitada que as duas sílabas correspondem às dezenas e às unidades do número 12: "*do*" para 2 e "*ze*" para 10. Já não é o caso das palavras designadas para representar os números compreendidos no intervalo de 16 a 19.

No entanto, em se tratando das dezenas exatas, os padrões de organização das palavras voltam a encobrir a numerosidade, haja vista a deformação dos prefixos e sufixos. Por exemplo: vinte e trinta são palavras que utilizam os prefixos *vin* e *trin*, que são deformações das palavras "dois" e "três", respectivamente;

enquanto os sufixos *te* e *ta* são novas deformações do dez. Para as demais palavras, representativas das dezenas exatas, existe uma regularidade maior, mas que não explicita as operações envolvidas, de modo que continuam a esconder a numerosidade, especialmente em virtude das deformações sofridas pelos prefixos: *quar* (deformação do quatro), *cinqu* (deformação do cinco), *sess* (deformação do seis), *set* (deformação do sete), *oit* (deformação do oito) e *nov* (deformação do nove). Também ocorre a deformação do dez para compor o sufixo *enta*, que é ligado ao prefixo por uma operação de multiplicação não explicitada. Segundo Fayol (1996), a adição de sílabas breves e as mudanças nas sílabas obscurecem o sentido quantitativo e dificultam a identificação da estrutura do SND nas palavras-números e na ligação com os números arábicos.

Em relação à escrita arábica, pode-se recorrer a registros históricos para compreender sua origem. Os hindus, a princípio, expressavam os números por extenso, utilizando nove nomes criados para expressar os nove primeiros números inteiros, seguidos de uma palavra utilizada para expressar uma dezena ou uma de suas potências ("dasa" para 10, "sata" para 100, "sahasra" para 1000, "ayuta" para 10000, entre outros). Esse procedimento esteve na base da estrutura do sistema de numeração de quantidades por algarismos. Com o decorrer do tempo, essas palavras foram suprimidas e a posição do algarismo no numeral passou a indicar por qual potência de dez ele seria multiplicado. Como exemplo, cita-se: 3425. Ele seria expresso, no começo, por "cinco dois dasa quatro sata e três sahara"; posteriormente, por "cinco. dois. quatro. três". Foi desta forma que, "ao operar tal simplificação, os sábios hindus tinham elaborado uma verdadeira numeração oral de posição, recebendo desse modo os nomes, em sânscrito, das nove unidades simples um valor variável dependente de sua posição na enunciação do número" (IFRAH, 1989, p. 269).

Nesta investigação estar-se-á levando em conta os resultados dos estudos apresentados, que se referem aos padrões de organização da escrita arábica e da palavra que expressa o número, em se tratando das operações cognitivas de produção, tratamento e conversão, as quais, segundo Duval (1995), estão relacionadas ao par conceituação/representação.

Por esta razão, apresentaremos, a seguir, as ideias defendidas por Raymond Duval a respeito da conceitualização de objetos matemáticos.

O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA CONCEITUALIZAÇÃO

De acordo com Duval (1995), a distinção entre um objeto matemático e a sua representação é de extrema relevância no funcionamento cognitivo. Por isso, faz-se necessário, no ambiente de ensino e aprendizagem, levar em conta essa diferenciação, de modo a investigar se a compreensão explicitada pelos sujeitos aprendentes se refere aos objetos matemáticos ou as suas representações.

Para o autor, a questão mais difícil a ser enfrentada é verificar se os sujeitos, em fase de aprendizagem, confundem os objetos matemáticos com suas representações, visto que eles só podem lidar com as representações semióticas para realizar uma atividade sobre os objetos matemáticos. É o caso, por exemplo, das confusões entre a recitação da sequência numérica e a escrita de numerais, entendidas como conhecimento do número e a estrutura do sistema de numeração, presente nos registros de representação do número.

Essa distinção exige considerar, no processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos, duas operações cognitivas, ligadas ora à representação desses objetos ora a sua conceitualização. Uma delas, segundo Duval (1993), é a *semióse*, que diz respeito à produção e à apreensão de uma representação dos objetos matemáticos; a outra é a *noésis*, que se refere à apreensão conceitual desses objetos.

A produção de uma representação, por sua vez, vai depender, segundo o autor, de um sistema semiótico que não pode ser de qualquer natureza, pois deve permitir a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

A formação de uma representação é realizada na língua materna por meio de desenhos, figuras ou fórmulas com signos próprios de uma ciência. Há que se considerar, no entanto, que esta não acontece independente do conteúdo a representar e nem deve deixar de respeitar as regras.

O tratamento é uma operação cognitiva que compreende uma transformação da representação no interior do mesmo sistema semiótico, mobilizando apenas um só registro de representação. Exemplo: ½ = 0,5 = 50%.

Neste caso foi efetuado um tratamento no numeral representativo de um número. Expressando-o através de uma fração, de um forma decimal ou de uma forma percentual. O sistema semiótico é o mesmo, independentemente de estarem sendo colocadas em jogo certas especificidades de cada uma das formas do número.

A conversão é também uma operação cognitiva, porém de outra natureza. Ela compreende a transformação de uma dada representação em outra, só que agora pertencente a um outro sistema semiótico, de modo a conservar a totalidade ou parte da representação inicial. É preciso que seja efetuada pelo sujeito aprendente, sem caracterizar uma tradução ou decodificação. Essa operação não é uma operação trivial e nem cognitivamente neutra, segundo alerta Duval (1995). Exemplo: "um número positivo" (língua materna) e "$x > 0$" (linguagem algébrica).

De acordo com o autor, se o processo de ensino privilegiar somente o tratamento, estar-se-á atribuindo demasiada importância à forma, como se ela, por ser responsável pela descrição de uma informação, permitisse a conceitualização. É na conversão das representações de um sistema semiótico a outro que haverá uma operação cognitiva capaz de ser descrita como uma *mudança de forma*, a qual possibilitará a conceitualização dos objetos matemáticos pelos sujeitos aprendentes.

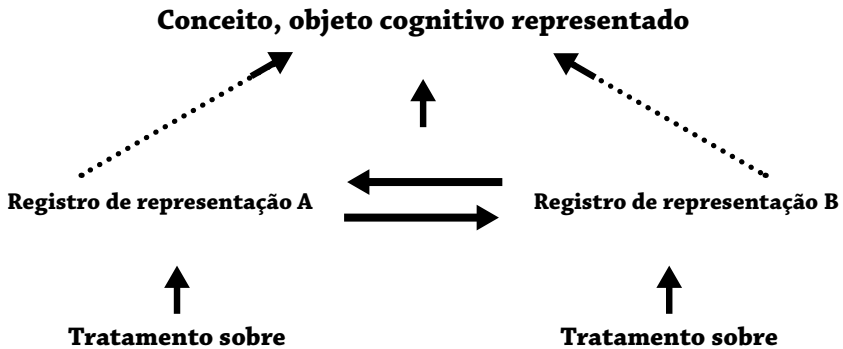
Isto não significa relativizar a importância da forma, já que ela é responsável por possibilitar a diversidade (diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático, pertencentes a diferentes sistemas semióticos de representação), o que, por sua vez, apresenta vantagens: a economia (que é dependente do tipo de registro utilizado numa operação cognitiva de tratamento) que permite a superação dos limites de uma representação e a rapidez na representação das relações entre objetos, a complementaridade de registros, compreendendo os elementos informativos ou comunicacionais que a representação torna possível e a conceitualização, que implica a coordenação dos registros de representação.

No tocante à conceitualização, Duval (1993) nos apresenta uma estrutura por meio da qual o funcionamento da representação semiótica é compreendido. Essa estrutura está ilustrada na Figura 1.

Figura 1 – Estrutura de representação em função da conceitualização

Conceito, objeto cognitivo representado

Registro de representação A ⇄ **Registro de representação B**

Tratamento sobre   **Tratamento sobre**

Fonte: DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences cognitives**, IREM de Strasbourg, v. 5, p. 51, 1993.

Essa estrutura, segundo o autor, baseia-se na crença de que a compreensão conceitual exige a coordenação de, ao menos, dois registros de representação, oportunizada pela operação cognitiva de conversão. Nessa estrutura, as flechas significam as transformações internas oriundas da operação de tratamento, e as externas as oriundas da operação de conversão, fazendo-nos lembrar que elas não são naturais ou espontâneas, terão de ser provocadas, levando à distinção entre o representante e o representado e impedindo o enclausuramento de um único registro de representação.

Segundo Duval (1995), a conversão, que é necessária para a conceitualização, enfrenta, por sua vez, o fenômeno de congruência ou de não-congruência entre as representações semióticas de sistemas diferentes de um mesmo objeto. É esse fenômeno que pode explicar os sucessos ou os insucessos dos alunos frente às questões que implicam uma mudança de sistema semiótico de representação, dependendo da congruência ou da não-congruência.

Existem três condições a serem satisfeitas para que dois sistemas semióticos de representação sejam congruentes: correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações e conversão de uma unidade significante da representação de partida a uma só unidade significante na representação de chegada.

Duval (1995) analisa alguns problemas de estrutura aditiva de Vergnaud de modo a explicitar esse fenômeno. No problema “ganha três, ganha três, então ganha seis”, o fenômeno da não congruência não se manifesta, pois as três condições acima apontadas estariam sendo satisfeitas:

Ganha 3 (+3), ganha 3 (+3), ganha 6 (+6).

Já no caso do problema “ganhou algumas, ganhou 3, no total ficou com 8”, existe a necessidade de mudança de ordem das unidades significantes para expressar os procedimentos de solução em linguagem algébrica, quer seja um procedimento de diferença ou de complemento.

Se esse problema for resolvido por um procedimento da diferença, a ordem tem que ser invertida e não há nenhuma informação semântica no enunciado em língua natural que indique a subtração exigida para o mesmo:

(ganhou) 8 ? (ganhou) 3 = ...

Se o problema for resolvido pelo procedimento do complemento à ordem, ela também tem que ser invertida, pois a comutatividade é uma exigência:

(ganhou) 3 + (ganhou) ... = (ganhou) 8.

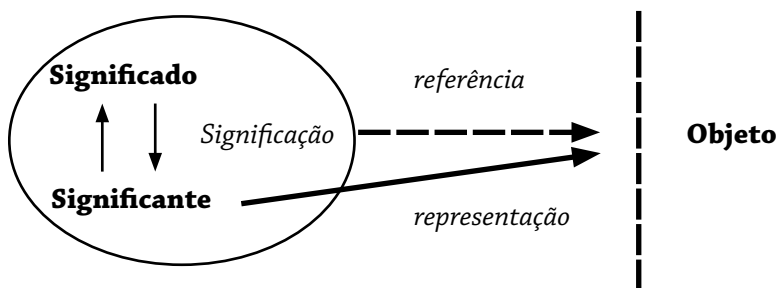
Cabe ressaltar uma questão importante em relação ao fenômeno da congruência ou da não-congruência. Esta diz respeito ao que aponta Duval (1995), dois sistemas semióticos podem ser congruentes num sentido e não o ser no sentido inverso.

No caso de problemas, há que se considerar o fato de que a sentença matemática em linguagem algébrica será um registro da solução ou dos procedimentos e estratégias utilizados para encontrar a solução. Neste caso, poderá haver ou não congruência, isto vai depender das heurísticas de resolução. A busca da solução, por sua vez, vai colocar em jogo outras propriedades ou relações, como por exemplo: “tenho algumas, ganho 3 e fico com 8”. Neste caso, é necessário a reversibilidade, para se aceitar o caminho de volta, ou a comutatividade, no caso da utilização de um procedimento de complemento, pois deve-se aceitar que $x + 3$ é igual a $3 + x$.

Há que se considerar ainda as estruturas diádicas e triádicas presentes nas relações que se estabelecem entre os objetos e seus registros de representação.

Essas estruturas são consideradas tendo em vista a dimensão linguística, que analisa as representações em relação as suas funções de expressão, tratamento e objetivação. Em se tratando da função de expressão vale ressaltar que entre os diversos significantes de um determinado significado existe uma significação por parte do sujeito em relação a um conceito que tem por referência um objeto matemático. Neste caso, a relação é triádica.

Ela pode ser diádica quando se tratar de signos constituídos por uma referência instituída (tais como vetores e operadores) e que não possuem significação. Nas estruturas triádica e diádica da significância de um signo, as relações podem ser de representação ou de referência entre os elementos constitutivos dessa significância (significante, significado, objeto). Na estrutura diádica, elas serão de representação dos objetos, enquanto na triádica elas serão de referência ao objeto para os signos aos quais serão atribuídos uma significação determinada, através do sistema da língua, ao se relacionar o significante e o significado. A relação ao objeto, neste caso, é apenas assegurada no plano do discurso. A Figura 2 explicita essas relações e as estruturas diádicas e triádicas da significância.

Figura 2 – Estrutura diádica e triádica da significância

Fonte: Duval (1995, p. 63)

Podemos exemplificar essa estrutura com a palavra *razão*: essa palavra é um significante que pode estar relacionado a um objeto matemático ou a um objeto de conhecimento pertencente a outra área de conhecimento. Para o matemático, *razão* pode ser uma palavra associada a um quociente entre duas grandezas da mesma natureza, enquanto para um não matemático a palavra *razão* pode estar associada a "estar correto" ou à "racionalidade". De acordo

com a significação para o sujeito, o significante vai estar relacionado com um significado, que por sua vez tem por referência um determinado objeto.

A questão das relações de representação ou de referência é fundamental quando se trata das operações de tratamento e de conversão. Isto porque as transformações inter e intraregistros, compreendidas nessas operações, vão ter que ser efetuadas tendo por referência o mesmo objeto matemático, isto é, tanto o registro de representação A como a sua substituição, após transformação, por um outro registro de representação B. Porém, essa substituição não ocorre sem um determinado custo cognitivo, o qual é causado pelos problemas da congruência semântica. A substituição pode se chocar com dificuldades em virtude da diferença semântica. Por exemplo: posso substituir o numeral arábico 13 pela palavra "treze", mas esses registros são pertencentes a redes semânticas diferentes, organizados segundo padrões diferentes, de naturezas diferentes (monofuncional e plurifuncional, respectivamente), admitindo, portanto, tratamentos diferentes (algoritmizáveis e não algoritmizáveis). Substituir o numeral arábico pela palavra pode significar um salto entre duas redes semânticas, de tal forma que o indivíduo talvez não o perceba, nem mesmo se lhe for indicado. Como na matemática a mudança de registro semiótico é frequente, a substitutividade desempenha papel essencial em relação ao custo cognitivo. A substitutividade – tanto interregistro como intraregistro – tem por base a invariabilidade da referência.

A partir do exposto, pode-se inferir que ser referencialmente equivalente não significa ser congruente. Assim, entre duas representações será importante considerar não só a relação de equivalência referencial, mas também a relação de congruência semântica:

> não-congruência semântica é uma fonte de dificuldades, independentemente do conteúdo matemático. Uma atividade matemática pode ser bem sucedida se sua apresentação e seu desenvolvimento não exigirem alguma transformação entre as expressões de formulação ou representações congruentes e, a mesma tarefa matemática, dada com uma variante que implica uma manipulação de dados não-congruentes pode conduzir ao fracasso (DUVAL, 1988, p. 18).

Quando duas apresentações são ditas *congruentes* os elementos podem ser emparelhados: eles explicitam as mesmas unidades de informação, na mesma

ordem, considerando a equivalência referencial. Quando as representações não explicitam as mesmas unidades, ou quando a ordem não corresponde, é preciso proceder a uma transformação de uma das sequências (apresentações) para torná-las comparáveis.

Duas apresentações podem ser ditas *mais* ou *menos* congruentes, segundo o número de transformações necessárias. Vejamos no caso do SND:

a) Os particulares de 11 a 15

Onze = 1 + 10

11 = 10 + 1

Há que se inverter a ordem de um deles e ainda analisar o sentido do prefixo *on* como uma deformação do *um* e do sufixo *ze*, como uma deformação do *dez*. Torna-se necessário, por essa razão, atribuir sentido ao "1" da esquerda como sendo "10", visto que esta quantidade não é explicitada no algarismo 1, de acordo com a posição por ele ocupada no numeral.

b) Valores entre 16 e 19

Dezesseis = 10+ 6

16 = 10 + 6

Nesse caso, deverá haver a decodificação do algarismos "1" do "16" como sendo 1 dezena, em virtude da posição ocupada na representação arábica. Logo, o algarismo "1" do "16" não explicita a dezena da mesma forma que o prefixo *dez* da palavra dezesseis. Na palavra, o prefixo *dez* faz referência a dez unidades elementares e não a um grupo de dez.

c) numerais maiores que 20

Vinte e um = 2 x 10 + 1

21 = 2 x 10 + 1

As unidades de significado dos dois registros estão na mesma ordem, porém não explicitam as quantidades de forma clara e igual. Na escrita arábica há necessidade do reconhecimento do algarismo 2 como representativo de duas dezenas em virtude de sua posição. Na palavra é necessário o reconhecimento de que o prefixo *vin* é uma deformação da palavra *dois*, e de que o sufixo *te* é

uma deformação da palavra *dez*, além de ambos estarem articulados através de uma multiplicação. Ainda há o fato de que o registro que representa o número envolve três palavras, enquanto a representação arábica envolve dois algarismos, não havendo, portanto, univocidade terminal. Uma das palavras explicita uma das operações que articula as palavras entre si: o conectivo *e* em *vinte e um* representa uma adição. Essa operação não é explicitada na escrita arábica.

Nos dois registros de representação, percebem-se variações de traços semânticos e de forma.

	escrita	**numeral arábico**
Traços semânticos	prefixos e sufixos	posição dos algarismos
Forma	palavras	algarismos

"O problema da congruência ou não-congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é, portanto, o de distância cognitiva entre estas duas representações, sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro" (DUVAL, 1988, p. 13). Quanto maior a distância cognitiva, o custo de passagem de uma apresentação a outra pode aumentar. É possível, também, que essa passagem não seja efetuada ou entendida.

A substituição por equivalência referencial cumpre uma função de tratamento e de transformação da informação, desde que se introduzam condições semânticas. Neste contexto, os problemas colocados pela congruência semântica se tornam primordiais na aprendizagem sempre que a atividade cognitiva requeira um mínimo de tratamento.

Após analisar os padrões de organização de registros de representação do número, em especial a escrita arábica, a palavra e também a forma como a estrutura do SND fica mais ou menos explicitada, além das relações, operações cognitivas e fenômenos para a conceitualização de objetos matemáticos na ótica de uma teoria de representações, passaremos a mobilizar e articular esses elementos. O objetivo dessa estratégia é buscar a resposta para a problemática que levantamos sobre nosso objeto de investigação, a qual está voltada para a compreensão da estrutura do SND no numeral arábico e na palavra.

Para tanto, esclareceremos os procedimentos metodológicos voltados para as operações cognitivas de formação, tratamento e conversão com a estrutura do SND da escrita arábica e da palavra.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Duval (2003) lista alguns procedimentos voltados para o funcionamento cognitivo de modo a permitir que o aluno, em situação de ensino, possa compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos matemáticos que a ele são propostos, visto a complexidade do funcionamento cognitivo subjacente à atividade matemática e sua especificidade. Esses procedimentos sugeridos e as orientações necessárias foram levados em conta ao serem organizadas e analisadas as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão para a aprendizagem da estrutura do sistema de numeração e para a identificação dessa estrutura em registros de representação do número: a palavra e o numeral arábico.

Após análises e reflexões, apontar-se-ão questões que farão referências às exigências a serem levadas em consideração na organização da prática educativa. Explicitaremos, também, as relações existentes entre o par representação/conceitualização da estrutura do SND. Igualmente, as orientações relativas sobre o que observar nas produções dos alunos, indagando sobre um modelo pertinente para analisar e interpretar as observações e os dados da experiência, que são constituídos dos desempenhos ou procedimentos adotados por crianças para lidar com a estrutura do SND, os quais apontam a não identificação dessa estrutura nos diferentes registros de representação.

Face ao exposto, alguns passos sugeridos nesses procedimentos foram adotados para o presente estudo: a) identificação da distinção sobre o que sobressai numa operação cognitiva de tratamento de um registro (palavra ou numeral arábico) e aquilo que sobressai em uma operação cognitiva de conversão de um registro de representação em outro (palavra em numeral arábico e vice-versa); b) análise das formas de utilização da conversão como instrumento de análise: variáveis cognitivas próprias de cada registro de representação (a palavra e a escrita arábica); e c) identificação da congruência

ou da não congruência semântica entre as palavras e os numerais arábicos que expressam os números.

Para contemplar as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão, é necessário, primeiramente, discriminar as unidades cognitivas pertinentes ao conteúdo de uma representação. Por esta razão, apresentar-se-ão as duas condições a serem satisfeitas para a identificação de tais unidades, segundo Duval (1999):

> 1 - submeter um registro de representação a todas as variações possíveis, sendo que as representações formadas, após as variações, devem ainda ter sentido;
>
> 2 - tomar dois registros de representação associados entre si e submeter um deles às variações que provoquem variações no outro.

Neste estudo, deveremos identificar as variáveis cognitivas do numeral arábico e da palavra que expressa o número. As variações serão cognitivamente pertinentes quando uma variação D2 num registro D provocar uma variação D3 no registro associado D1, tendo como referência objetos diferentes. Exemplo: no numeral arábico há o valor relativo e absoluto dos algarismos. Ambos constituem as variáveis cognitivas desse tipo de registro de representação. Se um dos algarismos do 1***2*** (registro D) for alterado, obter-se-á um novo numeral, 1***3*** (registro D2 que sofreu variação), que representa um outro número e, consequentemente, a palavra a ele associada – ***do***ze (registro D1) – também sofrerá alteração: ***tre***ze (registro D3 que sofreu variação). O mesmo acontecerá se mudarmos o algarismo de posição: (registro D) 21→ 12 (registro D2 alterado). As palavras "vinte e um" e "doze" constituem os registros D1 e D3 associados, respectivamente, aos registros D e D2. É este princípio de variação que está na base da atividade de conversão. Uma variação cognitiva sempre vai consistir numa mudança de sentido. Duval (1999) afirma que a compreensão do sentido provoca automaticamente a compreensão do objeto.

Deve-se, no entanto, considerar o que nos alerta o autor ao afirmar que um dos maiores problemas da aprendizagem é a discriminação das unidades que são cognitivamente pertinentes. Isto vai exigir que façamos as variações estruturais, objetivando verificar qual delas provoca variações cognitivas e

qual não provoca, desenvolvendo-se, desta maneira, a capacidade de efetuar esta discriminação.

A seguir, demonstraremos as unidades que são cognitivamente pertinentes nos dois registros de representação do número, a palavra e o numeral arábico, para que se possam propor variações cognitivas a serem coordenadas pelos sujeitos aprendentes numa operação cognitiva de conversão, contribuindo assim para provocar a compreensão do objeto matemático.

A identificação das unidades cognitivamente pertinentes destes dois tipos de registro de representação têm que ser feitas em separado, já que as regras de formação da palavra e do numeral arábico são diferentes. Após essa identificação, submeter-se-á um dos registros a variações e verificar-se-á se elas produzem registros que têm como referência outros objetos matemáticos. Se isto acontecer, estará sendo identificada uma unidade cognitivamente pertinente, que estará, por sua vez, evidenciando a estrutura do SND nos dois registros de representação. Se houver uma variação num dos tipos de registro que não provoque uma referência a outro objeto matemático, então ter-se-á um tratamento no interior do próprio registro, apesar de este, igualmente, envolver as unidades cognitivamente pertinentes, obedecendo a regras específicas e próprias do registro de representação de acordo com sua natureza. Exemplo: transformar o numeral 12 em 10 + 2.

As variações provocadas nos dois tipos de registros de representação do número para a identificação das unidades cognitivamente pertinentes compreenderão, num primeiro momento, os seguintes intervalos numéricos: os particulares de 11 a 15 (11, 12, 13, 14, 15), os valores compreendidos no intervalo 16 a 19, as dezenas exatas, os valores que compreendem os pares dezena/unidade (por exemplo, 53), centena/unidade (por exemplo, 102), centena/dezena (por exemplo, 120), centena/particular (112), centenas exatas (por exemplo, 200) e os valores que compreendem o trio centena/dezena/unidade (por exemplo, 153).

Apresentar-se-á, primeiramente, um quadro com as variações provocadas para em seguida elaborarmos as interpretações que indicam o fenômeno da congruência ou da não congruência.

1) Variações provocadas no numeral arábico e verificação da variação provocada no seu registro associado pertencente a um outro sistema semiótico (a palavra), envolvendo alguns números do tipo: particulares, dezenas exatas, itens do tipo D/U

Quadro 3 – Identificação de unidades cognitivas em cada tipo de registro de representação

Numeral arábico	Palavra
11 Variação no algarismo da direita 12 (referência a outro objeto) Variação no algarismo da esquerda 21 (referência a outro objeto)	**Onze** Doze (mesma pilha) Vinte e um (outra pilha)
12 21 Inversão da posição dos algarismos (referência a outro objeto). O mesmo acontecerá para os demais particulares (13, 14 e 15) e para os itens tipo dezena/unidade compreendidos no intervalo [16; 99]	**Doze** Vinte e um (outra pilha)
20 02 Inversão dos algarismos (referência a outro objeto) O mesmo acontecerá para o 30, 40, 50, 60, 70, 80 e 90	**Vinte** Dois (outra pilha)

Interpretações:

A escrita arábica admite variações na posição dos algarismos do numeral (valor relativo) e no valor absoluto dos algarismos. A variação de posição provoca a referência a outro objeto (outro número), que pode ou não pertencer a mesma pilha (20 e 02 ou 32 e 23), a variação do valor absoluto do algarismo também provoca uma referência a outro objeto que pode ser ou não da mesma pilha (11 e 12 ou 11 e 21). Isso significa que a ***posição*** e o ***valor absoluto*** dos algarismos são as unidades cognitivamente pertinentes que, caso sofram variações, passarão a ter por referência outro objeto.

Já a palavra escrita que representa o número vai sofrer variações nos sufixos e prefixos. Por exemplo: a variação do prefixo *on* do *onze* para *do tre*, *quator* ou *quin* gerará palavras que terão como referência outro objeto, mesmo que da mesma pilha. A partir do *dezesseis*, a variação é no sufixo, para que não haja mudança de pilha: *dezessete, dezoito, dezenove*. Serão necessárias deformações e inversões nos prefixos e sufixos das palavras que representam os números para que se configurem variações nas unidades cognitivas pertinentes e nos

seus registros associados pertencentes a outro sistema semiótico, como é o caso da escrita arábica. Se a deformação compreender um sufixo do tipo *enta*, ocorrerá uma variação que levará a outro objeto pertencente a outra pilha: por exemplo, *quatorze* e *quarenta*. Se a variação compreender uma deformação do sufixo *entos* ou *centos* haverá uma alteração na potência de 10.

De qualquer forma, na palavra, a alteração dos prefixos e sufixos criará novos objetos, que ora pertencem a mesma pilha e ora não pertencem. No entanto, a alteração dos prefixos e dos sufixos provocará não somente trocas, como na escrita arábica, mas também deformações e inversões. Logo, **sufixos** e **prefixos** são as unidades cognitivamente pertinentes na palavra que expressa o número, que, ao sofrer variações, tem por referência outro objeto matemático. Analisar-se-ão as variações dessas unidades identificadas nos dois registros, concomitantemente.

2) Numerais que compreendem C/U (centenas e unidades), C/P (centena com particular), C/D (centena com dezenas exatas) e C/D/U (centenas com dezenas não exatas). (Quadro 4).

Quadro 4 – Relação de numerais nos dois registros

101 **cento** e um	107 **cento** e sete	113 **cento** e treze	501 quinh**entos** e um	162 **cento** e sessenta e dois
110 **cento** e dez	071 setenta e um	131 **cento** e trinta e um	105 **cento** e cinco	126 **cento** e vinte e seis
011 onze	017 dezessete	311 trez**entos** e onze	150 **cento** e cinqüenta	261 duz**entos** e sessenta e um
	170 **cento** e setenta		051 cinqüenta e um	216 duz**entos** e dezesseis
	701 sete**centos** e um		510 quinh**entos** e dez	621 seis**centos** e vinte e um
	710 sete**centos** e dez		15 quinze	612 seis**centos** e doze

Interpretações:

Todas as variações de posição dos algarismos do numeral provocam um outro número, ora composto por dezenas e unidades e ora composto por centenas e dezenas (exatas ou não exatas). Esta variação pode ser identificada na palavra que constitui um registro associado ao mesmo número representado pelo numeral, verificando os destaques em negrito (os grupos de cem), os destaques sublinhados duplamente (os grupos de dez) e os destaques subli-

nhados (as unidades). Pode-se observar que o algarismo que sofreu variação em relação a sua posição ocupada no numeral ora representa unidades simples, ora grupos de dez e ora grupos de cem.

O número de palavras em relação ao número de algarismos do numeral vai depender do tipo de número que se forma após a variação:

- C/U: 3 palavras e 3 algarismos (por exemplo 102; cento e dois);
- C/D (exata): 3 palavras e 3 algarismos (por exemplo, cento e vinte);
- C/D (não exata): 5 palavras e 3 algarismos(por exemplo, cento e vinte e três);
- D/U (acima de 20): 3 palavras e 2 algarismos (por exemplo, 24, vente e quatro);
- D/U (de 11 a 19): 1 palavra e 2 algarismos (por exemplo, 17, dezessete).

Porém, mesmo que o número de palavras não seja igual ao número de algarismos, é possível identificar os grupos de dez, de cem e as unidades, ora nas palavras por inteiro, ora nas sílabas (sufixos e prefixos) que compõem uma das palavras.

Após essa análise é possível focar as unidades cognitivamente pertinentes às atividades que vão compreender as operações de conversão e de tratamento. Em cada uma das operações elas desempenharão desafios cognoscitivos diferentes, mas que estarão voltados para a aprendizagem da estrutura do SND, dos conteúdos das representações e para a diferenciação entre representante e representado.

Segundo Duval (1988) *"entre duas representações de informação, há duas relações independentes a considerar: a relação de equivalência referencial e a relação de congruência semântica. Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes"* (p. 8). De acordo com o autor *"a conduta em matemática implica uma substitutividade tanto inter-registro como intraregistro com base numa invariabilidade de referência"* (p. 8). Ao mudar de registro é necessário respeitar certos procedimentos de codificação e enfrentar as dificuldades inerentes às diferenças entre as redes semânticas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A elaboração de atividades ou de tarefas a serem propostas no processo de ensino deve levar em conta a estrutura triádica que explica as relações entre significantes e significados, mediados por significações que têm por referência o sistema de numeração decimal e sua estrutura. Deve-se, também, levar em consideração os padrões de organização e o caráter operatório, tanto das palavras que expressam os números como da representação desses através de algarismos.

O que se deve buscar é a compreensão da estrutura do SND veiculada nos registros de representação do número. Por esta razão, a fundamentação deve se dar nas relações entre *semiósis* e *noésis*, que envolvem as relações entre significantes e significados, além das atividades de produção, tratamento e conversão, que, por sua vez, compreendem o fenômeno da congruência e da não-congruência.

O que se configurou para o estudo que foi desenvolvido foi a necessidade de uma abordagem voltada para o trânsito entre as duas formas de registros de representação do número (a escrita e o numeral arábico), visto que eles explicitam, de modos diferenciados, a estrutura do SND. Tal abordagem tem de levar em conta os resultados de pesquisas que indicam as causas das dificuldades de compreensão dessa estrutura, para que se possa buscar uma forma de interpretar e enfrentar a problemática de modo substancial, além de desvendar relações entre os dados pertinentes desse campo conceitual específico, o SND.

Neste sentido, as proposições de Duval (1995), relativas à relação *semiósis/noésis* e seu papel na construção de conhecimentos, permitiram um melhor entendimento da complexidade do processo de compreensão do SND. Na perspectiva adotada, a elaboração de tarefas para a situação de ensino vai implicar compreender vários instrumentos nocionais e também relações e inferências pertinentes ao sistema conceitual, que são igualmente relevantes a uma teoria de representações por compreenderem sistemas semióticos e não semióticos, em relação aos quais estão subjacentes formas diferenciadas de tratamento cognitivo colocadas em ação.

Isto significa levar os alunos a transitar de um registro de representação para outro, vivenciando dois problemas: a aprendizagem do funcionamento representacional de cada um dos registros que pertencem a sistemas semióticos com especificidades e particularidades e a conversão de uma representação produzida num registro em uma representação do objeto em outro registro.

Intencionou-se mostrar que a diversidade de registros de representação, que é inerente ao funcionamento do pensamento, só torna possível o conhecimento da estrutura do SND se houver uma diferenciação progressiva de diferentes registros de representação do número. O número expressa a medida de um conjunto, para ser comunicado, exigirá, por questões de custo de memória e tratamento, um registro de representação e, consequentemente, uma estrutura para um sistema de numeração.

Podemos responder a uma das questões levantadas a respeito das operações de produção, tratamento e conversão afirmando que, na organização das tarefas de uma situação de ensino, é preciso considerar os dois aspectos compreendidos numa representação: a sua forma (língua materna, linguagem algébrica) e o seu conteúdo (maneira pela qual a representação apresenta o objeto e através da qual o objeto se torna acessível). Esta é uma questão de extrema relevância, visto que os dois registros de representação do número não têm o mesmo conteúdo. Isto significa que, além da aprendizagem do objeto de estudo em questão, isto é, da estrutura do SND, há a necessidade de organização de situações que compreendam a aprendizagem da forma e do conteúdo do registro de representação.

Um dos objetivos a serem atingidos com a presente investigação diz respeito à apresentação de questões relevantes referentes ao par conceituação/representação, para que seja possível subsidiar ações voltadas para a ressignificação dos registros de representação de quantidades. Ao proceder desta forma, deu-se um passo na direção de apresentar respostas para a problemática levantada em relação ao objeto. Isto porque encontramos no aporte teórico ideias defendidas por Duval relacionando a conceitualização com a representação, o que ressalta as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão. Além disso, o autor também levanta o fenômeno da não congruência, sua relação com os insucessos dos alunos, bem como suas

dificuldades em compreender a estrutura do SND e identificá-la nos diferentes registros de representação do número.

Um outro objetivo estabelecido no início da investigação voltou-se para a identificação dos padrões de organização do numeral arábico e da palavra que expressa o número. Resultados de pesquisas de Fuson e Kwon (1991) e estudos de Fayol (1996) e Ifrah (1989) que possibilitaram a compreensão destes padrões e de suas variações necessárias para contemplar as operações cognitivas de tratamento e conversão e, consequentemente, a compreensão dos conteúdos dos registros de representação do número e a identificação da estrutura do SND nestes registros. Os resultados obtidos com as análises efetuadas permitiram enfrentar a problemática levantada e apresentar respostas para buscar a atribuição de significados.

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES FUNDAMENTADAS

Um mesmo objeto pode ser representado por vários registros de representação que não possuem uma mesma forma e um mesmo conteúdo. Segundo Duval (1998, p. 32) *"a forma depende do registro de representação, o conteúdo depende das possibilidades de explicitação das propriedades do objeto que permite o registro de representação e o tratamento depende igualmente do registro de representação"*.

As relações entre a representação e o objeto representado são compreendidas em seu modo de produção, visto que uma representação está ligada a sua utilização e que as diferentes representações desempenham papéis diferentes no desenvolvimento dos processos cognitivos. O objeto representado (no nosso caso, a estrutura do SND que é utilizada para representar números por meio de diferentes registros de representação) é a causa da representação, em razão de um mecanismo ou de um sistema que permitiu produzir os diferentes registros de representação.

É por esta razão que as dificuldades dos alunos, em relação à aprendizagem do SND, têm que ser estudadas através da produção dos registros de representação nos sistemas que permitem esta produção e também em virtude de suas especificidades e de sua natureza, que tornam mais ou menos explicitado o

objeto representado (no nosso caso, a base 10 e o valor posicional compreendidos na estrutura do SND). Esses dois aspectos compreendidos na estrutura são interligados por operações matemáticas de adição e multiplicação e deverão estar presentes nos registros de representação em virtude do sistema utilizado.

> [...] é o sistema mobilizado para produzir uma representação que determina, de um lado, a natureza da relação entre esta representação e o objeto representado e, de outro lado, a forma da representação produzida e seu conteúdo isto é, a maneira pela qual a representação torna acessível o objeto representado, explicitado ou colocado em primeiro plano certas propriedades em detrimento de outras" (DUVAL,1999, p. 41).

As tarefas de uma situação de ensino devem ser elaboradas levando em consideração o aspecto funcional ligado à produção de representações semióticas, que é relativo ao tipo de atividade que os signos permitem abranger. Essas atividades estão ligadas, por sua vez, às funções cognitivas fundamentais de comunicação, tratamento e objetivação, que transformam a representação semiótica em registro de representação.

Deve estar presente também a questão das duas apreensões diferentes que as representações semióticas possibilitam: uma apreensão do objeto e outra da representação. Isto significa que a representação pode direcionar a atenção sobre o objeto ou sobre ela mesma.

Segundo Duval (1996), considerando que os objetos matemáticos só são acessíveis por meio de representações e os tratamentos dependem das possibilidades dadas pelas representações, elas não podem ser consideradas secundárias em relação aos objetos matemáticos propriamente ditos.

Em relação à significância dessas representações, um outro aspecto de natureza estrutural se impõe, pois, enquanto signos, elas adquirem valores diferentes de acordo com o sistema semiótico utilizado para produzi-las, o qual determina um campo de significância, de representação ou de referência ao objeto representado.

Essa questão deve ser infundida de forma significativa na elaboração das tarefas da situação de ensino, pois as propostas devem contemplar o conteúdo da representação, o qual não deve ser confundido com o objeto representado.

Isso significa, sucessivamente ou simultaneamente, que se deve lidar com a compreensão do conteúdo do registro de representação de acordo com a sua forma (escrita arábica ou palavra), de modo a explicitar o seu conteúdo (valor relativo dos algarismos na escrita arábica e análise da articulação entre sufixos e prefixos das palavras) valendo-se do objeto matemático de aprendizagem: o SND.

Todo o estudo procurou, enfim, mostrar que as possibilidades de organização de tarefas para compor uma situação de ensino que permita aos alunos compreender o SND encontram sentido nos seguintes argumentos:

> o problema da aprendizagem, ao nível do funcionamento cognitivo do sujeito, deve ser formulado, não em termos do funcionamento cognitivo do sujeito, mas deve ser formulado em termos de condições de compreensão [...] que não estão ligadas a um conteúdo particular, mas à natureza das atividades e dos raciocínios que se encontram exigidos por meio de diferentes conteúdos ensinados. (DUVAL,1996, p. 377)

O estudo realizado traz derivações pedagógicas: ao proceder com uma análise funcional das atividades, das tarefas e das produções cognitivas com registros de representação, o resultado deve apontar a que a atenção do professor deve se voltar com relação a cada momento de compreensão do aprendiz e quais deverão e poderão ser, então, os objetos de intervenção específica e como esta deve se caracterizar.

Toda a trajetória percorrida indica o que se deve enfrentar em relação a um processo mais amplo de construção de formas cognitivas, os quais envolvem, atualmente, aprendizagens pontuais, de caráter mecanizado, tal como acontece com o sistema de numeração decimal: numerais arábicos repetidos numa ordem correta, escritos e utilizados em algoritmos; assim como as palavras para designação de números, porém, sem significação em relação à compreensão do SND.

Ultrapassar esse caráter mecanizado exigirá muito esforço e aquisições difíceis, raramente superadas pelo imediatismo das intervenções didáticas. No entanto, se isso não acontecer, poderemos comprometer e limitar o processo cognitivo mais amplo dos aprendizes na escola, o que poderá se refletir em seus cotidianos, em outras situações de vida que não a realidade de sala de aula.

REFERÊNCIAS

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences cognitives**, IREM de Strasbourg, v. 5, p. 51, 1993.

______. **Sémiósis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Suisse: Peter Lang, 1995.

______. Quel cognitive retenir em didactique des mathématiques? **Recherches em didactique des mathématiques**. La pensée Sauvage, v. 16/3, n. 48, p. 349-380, 1996.

______. Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, IREM de Strasbourg, v. 1, p. 7-25, 1988

______. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003.

______. ***Cours PUC***. São Paulo: Février, 1999. Documento datilografado.

FAYOL, M. **A criança e o número: da contagem à resolução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

FUSON, K. C.; KWON, Y. Systèmes de mots-nombres et outres outils culturels: effets sur les premiers calculs de l'enfant. In: BIDEAU, Jacqueline; MELJAC,C.; FISCHER, J.P. **Les chemins du nombre**. França: Presses Universitaires de Lille, 1991.

IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1989.

CAPÍTULO 10

RESOLUÇÃO DE PROBLEMA E MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA PERSPECTIVA DIDÁTICA[1]

Ettiène Guérios
Roberto José Medeiros Junior

INTRODUÇÃO

A resolução de problema é preconizada por pesquisadores de diferentes tendências educativas como estratégia para o ensino de matemática na educação básica, estratégia essa que possibilita, em tese, aprendizagem conceitual dos conteúdos curriculares provendo-os de significabilidade. Sentido não há em dissertar sobre as conveniências e propriedades de seu uso, tendo em vista a, praticamente, unanimidade em que é defendida. De pronto, fazemos coro com tais defensores, por observarmos o que a literatura apresenta em diferentes perspectivas práticas e em diferentes demarcações teóricas sobre resolução de problemas em aulas de matemática.

Embora façamos coro, observamos que o fato de a resolução de problemas, em tese, possibilitar tal aprendizagem, esta nem sempre ocorre, conforme os resultados de avaliações oficiais evidenciam e, também, como observamos em salas de aula no ensino fundamental, desde os anos iniciais. Se, por um lado, fazemos coro com os defensores da resolução de problemas em aulas de matemática e desejamos identificar situações didáticas que impulsionam a aprendizagem dos alunos, por outro, estamos preocupados em identificar

[1] Este capítulo tem origem na dissertação de mestrado "Resolução de Problemas e Ação Didática em Matemática no Ensino Fundamental" (UFPR-2007) e é expansão do texto apresentado no VII Congresso IberoAmericano de Educação Matemática (Cibem), em Montevideo, no ano de 2013.

situações que comprometem o alcance de resultados animadores de aprendizagem e as circunstâncias em que ocorrem.

Com este objetivo, temos olhado aspectos didáticos na atividade docente com resolução de problemas e decorrência deles na aprendizagem dos alunos. Situamos nosso olhar no aluno, em seus professores e no conhecimento matemático escolar. Os configuramos como uma tríade de elementos triangulados e a resolução de problemas como constitutiva de um caminho de aprendizagem do aluno, articulado com a atividade didática do professor. No contexto do olhar identificamos implicações que os enunciados dos problemas acarretam no movimento da tríade configurada. Para identificar tais implicações buscamos compreender a atividade heurística dos alunos no processo de resolução de problemas.

Nosso foco nesse trabalho é analisar circunstâncias advindas de nossa pesquisa que identificou relações didáticas que se estabelecem em uma tríade formada pelo conhecimento matemático escolar desenvolvido em sala de aula, pelo professor de matemática e por seus alunos de 6º e 7º anos do ensino fundamental, mediados pela resolução de problemas.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMA E ATIVIDADE DIDÁTICA

Documentos oficiais como os publicados pelo National Council of Teachers of Matemathics (NCTM) vêm, desde a década de 1980, propondo que a matemática escolar seja ensinada por meio de resolução de problemas. Na verdade, esses documentos evidenciam as preocupações dos estudiosos acerca de um ensino de matemática cujo objetivo fosse a efetiva compreensão do conhecimento matemático curricular. No escopo dessas preocupações apontam que, mais do que parte integrante da aprendizagem matemática, mais do que uma meta de aprendizagem matemática, a resolução de problemas é um dos meios de fazer matemática, constituindo-se assim em estratégia para seu ensino. A preocupação manifesta na expressão "fazer matemática" sinalizou para um outro pensar a respeito do ensino de matemática, naquela época ancorada no domínio procedimental. As publicações dos *Standards* do NCTM[2], da década de 1980 até 2000, influenciaram a comunidade educativa

[2] *An Agend for Action* (1980), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991), *Assessment Standards for School Mathematics* (1995).

sobre como pensar o ensino de matemática e foram provocando modificações na perspectiva do seu ensino em que a resolução de problema criou corpo como estratégia metodológica. Em âmbito nacional, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) vieram na esteira desse movimento.

O NCTM universalizou na década de 1980 a resolução de problemas como foco central para a aprendizagem em matemática, no entanto, Polya em 1945 publicara o clássico *How to solve it?* cuja segunda edição em 1975 tornou-se ressonante nos meios educacionais. Nas décadas de 1970 e 1980 métodos de ensino com foco na descoberta, ou redescoberta conforme alguns, despontavam, a heurística era vista como possibilidade de considerar modos próprios de pensar e, neste escopo, a proposta de Polya fez sentido e ganhou corpo.

Despontaram estudos, posicionamentos e propostas sobre a resolução de problemas. Segundo Schoenfeld (1992; 1996) a resolução problemas é a matemática propriamente dita, o que lhe confere *status* central nas atividades didáticas dos professores, visto que pode levar os alunos a pensar matematicamente uma vez que possibilita conjecturar e procurar soluções. Schoenfeld chama a atenção para diferentes entendimentos, por vezes conflituosos, sobre resolução de problemas e enfatiza suas decorrências para o ensino. Chamou-nos atenção alguns usos tradicionais que Stanic e Kilpatrick (1989) apontam para a resolução de problemas no ensino: como contexto em que são apresentados, como uma habilidade em que os alunos aprendem a resolver problemas depois que lhes são fornecidas regras e ferramentas para que consigam desempenhar eficazmente a tarefa e como arte.

Compreender o sentido do quesito resolução de problemas como contexto é tarefa sensível. Muitas vezes, apresentar um contexto é interpretado por professores como apresentar longos textos para enunciados de problemas, nem sempre sincronizados com contextos matemáticos. Nesse sentido, Guérios *et al.* (2009) alertam sobre entendimentos conflituosos acerca dos termos do trinômio "realidade-cotidiano-contextualização" que alguns professores têm ao confundi-los na ação didática por, não raras vezes, entendê-los como sinônimos. Tanto é que para alguns se as situações do cotidiano forem utilizadas para desencadear situações didáticas estarão automaticamente contextualizadas e que tais contextos devem estar inseridos nas atividades

didáticas com resolução de problemas. Aceitar que estarão automaticamente contextualizadas é um equívoco tendo em vista que o cotidiano diz respeito à circunstância de vida de cada um e aos significados que cada qual estabelece. A falta de sincronia entre contexto de enunciado e contexto matemático compromete a eficácia didática da resolução de problema em aulas de matemática. Uma decorrência desse comprometimento é a resolução de problema apenas como habilidade operativa para regras e dados conhecidos. Daí o interesse em pesquisar relações didáticas que se estabelecem em uma tríade formada pelo conhecimento matemático escolar desenvolvido em sala de aula, pelo professor de matemática e por seus alunos mediados pela resolução de problemas, focalizando a atividade heurística dos alunos. Certamente, o que se deseja é a resolução de problemas como arte, conforme Stanic e Kilpatrick. Na sequência deste capítulo abordaremos sobre relações dos alunos com textos de enunciados numa perspectiva de criação de contextos.

Interessante observar que Pozo apresenta alguns mitos relativos aos alunos que envolvem resolução de problemas, mitos esses, que oferecem indicativos para compreender a sala de aula sob o ponto de vista da didática. No nosso ver, a visão que os alunos têm da matemática e os mitos que criam e cultuam são, em grande parte, reflexos da ação didática de seus professores. São mitos citados:

> "Os problemas matemáticos têm uma e somente uma resposta correta. Existe somente uma forma correta de resolver um problema matemático e, normalmente, o correto é seguir a última regra demonstrada em aula pelo professor. Os estudantes 'normais' não são capazes de entender Matemática; somente podem esperar memorizá-la e aplicar mecanicamente aquilo que aprenderam sem entender. Os estudantes que entenderam Matemática devem ser capazes de resolver qualquer problema em cinco minutos ou menos. A Matemática ensinada na escola não tem nada a ver com o mundo real. As regras formais da Matemática são irrelevantes para os processos de descobrimento e de invenção" (POZO, 1998, p. 46).

Ao tratar a resolução de problemas sob o âmbito da didática, estamos atentos à decorrência dessa perspectiva sob a ótica dos professores com a consciência de que não se trata apenas de uma questão de método e sim de

compreensão do processo didático em sua essência[3]. Entendemos que concepções que os professores têm sobre matemática e ciência lhes guiam as atitudes didáticas, muitas vezes inconscientes, na sala de aula, influenciando decisivamente no modo como o aluno se apropria do conhecimento matemático. Tanto é fato que, dependendo da concepção que têm, os alunos são levados a apropriarem-se de conteúdos curriculares pela repetição ou, ao contrário, os compreenderem conceitualmente. Os mitos citados por Pozo são identificados nas atitudes de alunos frente à matemática escolar. Não raras vezes, a apatia que demonstram em sala de aula é reflexo da espera pela condução a ser seguida para a resolução, visto que concebem haver um único caminho para a resolução e decorrente busca da resposta correta e que este caminho lhes é dado pelo professor. Nesse caso, os mitos citados são verdadeiras barreiras para que os alunos compreendam as situações que os problemas apresentam e acreditem-se capazes de buscar soluções em uma matemática que lhes faça sentido conceitual.

Estudos no campo da didática podem possibilitar que os mitos citados cedam lugar para uma aprendizagem mais efetiva, quando se trata da resolução de problemas. Onuchic e Allevato (2004, p. 223-224) são convincentes nesse sentido quando argumentam que

- "resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias e sobre o 'dar sentido'. Ao resolver problemas os alunos necessitam refletir sobre as ideias que estão inerentes e/ou ligadas ao problema;
- resolução de problemas desenvolve o "poder matemático". Os estudantes ao resolver problemas em sala de aula, se engajam em todos os cinco padrões de procedimentos descritos nos Standards 2000: resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representação., que são os processos de fazer Matemática, além de permitir ir bem além na compreensão do conteúdo que está sendo construído em sala de aula;
- resolução de Problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que Matemática faz sentido. Cada vez que o professor propõe uma tarefa com problemas e espera pela

[3] Em artigo vindouro estaremos abordando a questão da Didática do Aluno, por nós anunciada neste texto. Podemos adiantar que trata-se de percursos de aprendizagem dos alunos e do modo como relacionam-se com os conteúdos curriculares de sorte a converte-los em conceitos matemáticos, ou não.

solução, ele diz aos estudantes: 'Eu acredito que vocês podem fazer isso!' Cada vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e a autovalorização dos estudantes são desenvolvidas;

- é gostoso! Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltam a ensinar do modo ‹ensinar dizendo›. A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos através de seu próprio raciocínio vale todo esforço e, de fato, é divertido, também para os alunos ;
- a formalização de toda teoria Matemática pertinente a cada tópico construído, dentro de um programa assumido, feito pelo professor no final da atividade, faz mais sentido.".

Sob um ângulo complementar interessou-nos compreender a atividade heurística dos alunos no processo de resolução de problemas, até porque nos havia chamado atenção a afirmação de Lester de que "a incorporação de problemas heurísticos no ensino da Matemática desenvolve nos alunos a habilidade de elaborar uma hipótese sobre o método de solução a ser usado e testar essa hipótese, além de permitir que o aluno use sua intuição sobre possíveis soluções dentre várias estratégias que ele conhece". (LESTER, 1988, p. 22).

Neste texto tratamos da ação didática do professor quando faz uso da resolução de problemas em suas aulas, problematizando e compreendendo seu movimento didático como metodologia de ensino. Para tal, focamos o olhar na atividade heurística do aluno. Em ato concomitante, analisamos circunstâncias didáticas decorrentes das relações identificadas na tríade formada e refletimos sobre elas.

A QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO E O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Tendo em vista o exposto, nossa questão de investigação foi identificar relações didáticas que são estabelecidas na tríade professor-aluno-conhecimento matemático no processo de ensinar matemática por meio da resolução de problemas. A figura 1 a representa nossa questão de investigação:

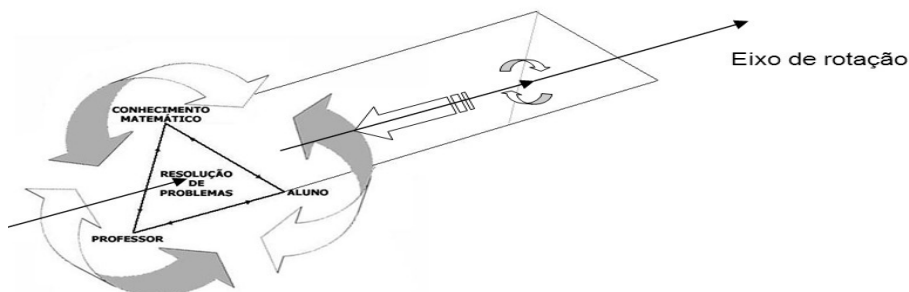
Configuramos a tríade formulada no enunciado da questão de investigação como algo rígido (três elementos triangulados), porém, não estático, em constante movimento, em que não há início, tampouco fim. A resolução de problemas é concebida como o eixo que dá sustentação a esse movimento.

Figura 1 - Questão de investigação: tríade professor-aluno-conhecimento matemático

Fonte: os autores

A tríade, na figura, pode ser vista alegoricamente como um caleidoscópio por concebermos a sala de aula como um organismo complexo e dinâmico, que se movimenta e se desequilibra constantemente. Daí a ideia do triângulo que sustenta a tríade não estar apoiado em uma base.

A figura a seguir ilustra o movimento de aprendizagem e o da docência, visto que são processos complementares. As flechas dão a ideia de dinamismo, que centralizada na resolução de problemas, produz a rotação em sentido horário e anti-horário. A ideia do caleidoscópio ilustra como os conceitos que estão presentes durante a aula estariam se movimentando constantemente para cada um de seus vértices, representando um movimento compacto e ao mesmo tempo difuso em que as relações didáticas ocorrem em diferentes matizes.

Figura 2 - Movimento da aprendizagem e da docência

Fonte: os autores

Dessa forma conteúdos de matemática do ensino fundamental estariam circulando pelos três vértices do triângulo, ora concentrados no professor, ora concentrados no aluno, ora em ambos, ilustrando, analogamente, o momento de uma aula desenvolvida com qualquer metodologia de ensino que tenha a resolução de problema como centralidade da atividade didática. A metodologia pode ser, inclusive, uma aula expositiva oral, se dialogada e dinâmica, de sorte a possibilitar aprendizagem conceitual.

Ressaltamos que esta alegoria pressupõem o ensino e aprendizagem como processos complementares, um significando o outro. Ou seja, caracteriza a vida na sala de aula e a interação contínua entre o que lhe é ensinado, objeto da ação docente e o que ele aprende. Nos momentos em que formos em direção ao conhecimento matemático propriamente dito, em que aluno e professor estão frente a possíveis estratégias de resolver o problema, o vértice conhecimento matemático é o ponto de destaque e a base está formando a via do diálogo entre o professor e o aluno, quando discutem como resolverão ou resolveram determinado problema.

Foi nesse momento que investigamos relações didáticas que são estabelecidas na tríade professor-aluno-conhecimento matemático, na ação de ensinar matemática por meio da resolução de problemas, concebendo-a como eixo que dá sustentação a esse movimento. Para nossa análise ponderamos sobre alguns usos e interpretações da resolução de problemas em matemática, sobre a didática, em especial a didática prática e sobre o significado de contexto na resolução de problemas.

PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

A pesquisa que originou este texto foi qualitativa de natureza interpretativa. Os sujeitos da pesquisa foram 28 alunos de 5ª série e 41 de 6ª série de uma escola pública, atuais 6º e 7º anos do ensino fundamental, e seus professores, que são licenciados em Matemática e possuem curso de especialização na área.

Os instrumentos para coleta dos dados empíricos foram: registro escrito das resoluções de lista de atividades matemáticas compostas por problemas e exercícios que os alunos resolveram em sala de aula, entrevista semiestrutura-

da com os professores dos alunos para compreensão do movimento didático estruturante da prática docente que desenvolviam e dos respectivos entendimentos acerca dos processos resolutivos dos alunos, a partir, inicialmente, dos registros escritos com as resoluções das atividades e posteriormente, dos registros orais dos alunos e entrevista semiestruturada com alunos para identificação dos procedimentos heurísticos presentes na resolução dos problemas sobre seus procedimentos de resolução, o que deu origem a uma leitura dos dados sob o ponto de vista da heurística presente nas respectivas resoluções.

Foram considerados como fatores de análise: a capacidade de interpretar perguntas, de fazer conjecturas, de usar diferentes estratégias, deduzir, intuir, ter a preocupação de interpretar e validar os resultados e, também, verificar a possibilidade de fazer generalizações.

A interpretação dos registros escritos foi realizada a partir da categorização das resoluções dos alunos. Em seguida, foram identificadas as concepções manifestadas pelos professores sobre a resolução de problemas e o modo como o aluno pensa e resolve (o registro escrito do aluno) e explica como resolve (o registro oral do aluno). Com este procedimento buscou-se identificar de que modo o aluno resolve os problemas na prática e como explica o modo como resolveu o problema quando questionado oralmente nas entrevistas. Adotou-se para esta interpretação a seguinte metodologia: destacou-se trechos das entrevistas dos alunos que chamaram a atenção por estarem impregnadas do que é chamado de "contradição na prática" (MARTINS, 1998) e que, por sua vez, esclareceram o modo didático com que os alunos resolvem problemas matemáticos. A análise foi fundamentada teoricamente na didática prática com foco na heurística na resolução de problemas, nas compreensões dos professores sobre a resolução de problemas e no desvelamento heurístico dos alunos. Sequencialmente, fez-se o cruzamento dos dados empíricos e teóricos. A seguir, identificamos o movimento estabelecido na tríade aluno-professor-conhecimento matemático quando se ensina matemática por meio da resolução de problemas retomando-se as interpretações dos registros escritos e orais circunstanciando as contribuições da didática, da heurística e da resolução de problemas.

DIDÁTICA EM UM CONTEXTO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E HEURÍSTICA

Iniciamos a abordagem teórica observando as produções de dois grupos de pesquisadores preocupados com as relações da didática na prática: um grupo alemão, o grupo Teoria da Educação Matemática (TEM) criado por Hans George Steiner, fundamentado na filosofia, com estudo epistemológico. O outro é um subgrupo deste, que é espanhol, o *Teoria y Metodologia de Investigación em Educación Matemática,* coordenado por Juan Godino. A atividade de teorização em educação matemática é vista por Steiner como um componente da educação matemática e por um sistema mais amplo denominado Sistema de Enseñanza de las Matemáticas (SEM) que engloba a didática da matemática, sendo a teoria da educação matemática o núcleo central do sistema. Ao seu redor, contendo núcleos próprios e independentes no sistema, têm-se outras áreas do conhecimento como sociologia, filosofia, epistemologia, psicologia, linguística, entre outras.

Por sua vez, Brousseau apostou em outra perspectiva teórica que permitisse compreender as interações sociais desenvolvidas na sala de aula entre alunos, professor e o saber. Para Brousseau (1978), a relação didática é potencialmente conflitiva, pois nela se busca propiciar interações do aluno com o objeto de conhecimento, aprofundando e ampliando as relações e significações acerca desse objeto. Daí emergem questões sobre as *situações didáticas* e *a-didáticas*. Para ele as situações didáticas se enquadram em um sistema formado pelos binômios *aluno–meio* e *aluno–professor.* A interação entre aluno e professor, em relação ao binômio *aluno-meio* envolve uma regulação da produção do conhecimento em que o professor desenvolve mecanismos didaticamente interferentes e valida as situações de aprendizagem. Já na situação *a-didática*, o aluno independe de tantas interferências para a promoção de sua aprendizagem, pois consegue caminhar por si na construção do conhecimento e na busca de soluções.

A resolução de problemas favorece a ocorrência de situações *a-didáticas* em que o aluno conjecture, elabore estratégias e descubra (heuristicamente) a solução do problema. Possibilita que construa conceitos pela experimentação e pelas relações que estabelece com os saberes e os conhecimentos que subsidiam um processo de aprendizagem. Nesse sentido, Guérios (2002; 2005)

ressalta o ato de criar como desencadeador de aprendizagem associando a criação ao caminhar, num processo de construção pela ação na prática em que a relevância da experienciação é extrema. Afirma Guérios que a ação do aluno nesse caminhar está vinculada à postura didática do professor, postura essa que lhe permita estabelecer relações por si. Nesse sentido, nos sentimos provocados a observar a resolução de problemas com seus enunciados e as resoluções apresentadas pelos alunos sob a perspectiva de relações didáticas estabelecidas entre alunos, professores e os conhecimentos matemáticos que ministram, quando a atividade é a resolução de problemas.

Nesta pesquisa a didática em matemática é entendida além do ponto de vista teórico que, por vezes, fez perguntar se era esse realmente o caminho para tentar explicitar os tipos de relações didáticas que buscamos identificar. Para tal fizemos uso de produções teóricas de Martins (1998) e Wachowicz (1989) no campo da didática prática e da didática na prática. Estes estudos no campo da didática têm como escopo o professor, destacam o aluno como personagem da ação didática e evidenciam decorrências provenientes de relações estabelecidas entre professor, aluno e conhecimento. Para nós, emergiram questões desafiadoras, como: seria a didática atribuída exclusivamente ao professor? Existiria didática do aluno? Seria o aluno fruto da didática do professor ou seria ele o personagem central da ação didática? Que relações estabelecidas pelos alunos em seus processos de aprendizagem são possíveis identificar?

Durante os estudos para responder à questão de investigação nos pareceu que a movimentação na tríade que compusemos, sustentada em seu eixo pela resolução de problemas, se faria pela égide da dialética. Wachowicz (1989), Klafki (1969) e Kowarzik (1974) trouxeram contribuições para a reflexão em relação à dialética que nos possibilitaram tornar visível o movimento didático da tríade formulada, além de visibilizar a complexa dinâmica das inter-relações e conexões em que a atuação do professor está compreendida.

Nas palavras de Kowarzik (1974, p. 13), o pensar dialeticamente revela que:

> "... nas situações educacionais, os momentos dialéticos não são fatos imobilizáveis, mas conexões de sentido em que a ação educacional precisa se mover enquanto determinada pedagogicamente; da mesma

> forma, a teoria pedagógica não é apenas uma análise que retrata a realidade educacional, mas um guia para o educador se tornar consciente da responsabilidade de sua atividade educativa".

Wolfgang Klafki (1969) afirma que a dialética é responsável por "proporcionar ao educador uma visão dos pressupostos frequentemente ocultos de sua atividade com uma sempre renovada consciência de si mesmo". (KLAFKI, 1969 *apud* SARRAZI, 1996, p. 86). Em nossa compreensão, o tornar-se consciente da responsabilidade de sua atividade educativa pode possibilitar ao professor, como se fora um alerta interior, a visão desses pressupostos ocultos de sua atividade e, assim, o instigar a uma prática pedagógica em matemática focada na busca de relações e inter-relações em situações didáticas numa perspectiva dialética. Essas situações didáticas, se viabilizadas pela resolução de problemas, favorecem a compreensão da realidade pela compreensão de seus enunciados ao mesmo tempo em que favorecem a compreensão conceitual de conteúdos curriculares. Configuramos, assim, uma simbiose entre a atividade educativa do professor e sua ação didática em aulas de matemática, que estabelece conexões de sentido com vistas a dinamicidade num processo de aprendizagem. Nesse contexto, parece-nos que a heurística dos alunos em suas resoluções desponta como fator determinante na atividade matemática com consciência pedagógica, que considera o pensar do aluno e seus caminhos de aprendizagem.

Frente ao que abordamos, encontramos ressonância em Wachowicz (1989), que desenvolveu seu estudo propondo uma didática cujo núcleo central é o método dialético na sala de aula. Sua proposta tem como fundamento considerar a possibilidade de contrapor à prática tradicional uma prática de educação através da ação didática, na qual o conteúdo do trabalho didático está intrínseco à prática social e a forma ao diálogo, por nós entendido como a relação estabelecida na tríade aluno-professor-conhecimento. Esse conhecimento é relacionado a problemas colocados em exercício pela prática social e ao conteúdo produzido socialmente. Em suas palavras:

> "... existe um método didático, que não é o método de pesquisa nem é o método de ensino próprio de cada área do conhecimento. [...] A este método, que não é um método geral 'capaz de ensinar tudo a todos',

> como queria Comenius na sua Didática Magna, mas a forma pela qual trabalha o pensamento ao se apropriar da realidade, chamaremos de método dialético" (WACHOWICZ, 1989, p. 2-3).

Para a análise dos dados empíricos fizemos este recorte teórico em relação à dialética para identificar com a lente da heurística como o movimento didático ocorre na prática quando se faz uso da resolução de problemas. Em relação à *atividade heurística* diz Puchkin:

> "Acontece que, na vida quotidiana, [...], freqüentemente surgem diante do homem situações que geram conflitos entre as circunstâncias e as exigências do exercício de uma atividade. Precisa o homem executar uma série de ações e solucionar este ou aquele problema. Contudo, as condições reinantes não lhe propiciam meios para solucionar esses problemas. E mesmo todo o seu arsenal de experiências passadas não lhe apresenta qualquer esquema completo adequado às condições emergentes. A fim de descobrir uma saída para a situação, deve o homem criar uma nova estratégia de ação, isto é, concretizar um ato de criação. Contingência como esta é, normalmente, denominada um problema ou uma situação problemática, ao passo que o processo psíquico que, ao auxiliar sua solução elabora uma nova estratégia que se mostra como algo inédito é designado como pensamento criador ou, para usarmos terminologia que nos vem de Arquimedes, atividade heurística" (PUCHKIN, 1969, p. 8).

Em nosso entender há conexão entre "ato de criação", "situação problemática" e "pensamento criador" em situação da vida e da escola, no dizer de Puchkin. O autor circunstancia a atividade heurística como própria da resolução de conflitos inerentes à vida cotidiana. O ato de criação a que se refere está contextualizado na prática social visto referir-se ao modo de sanar dificuldades, conflitos e exigências do exercício de uma atividade cujos métodos convencionais e cotidianos não foram suficientes para resolver uma atividade que, no sentido do texto, pode ser considerada em sentido universal como toda atividade. Ora, podemos contextualizar o ato de criação no âmago da prática educativa como a criação de estratégia para soluções pretendidas. Ao transportarmos para a atividade didática, torna-se central no processo de resolução de problemas como estratégia para a aprendizagem. Se ampliarmos o contexto da atividade didática para o contexto educacional em suas múltiplas dimensões, adquire sentido tão amplo quanto profundo.

As ilações que podemos fazer entre método dialético e atividade heurística, assim como os entrelaçamentos entre atividade cotidiana, prática social e situações educacionais levam a crer em uma prática educativa dialética em que o pensamento se aproprie da realidade e que potencialize a heurística na resolução de problemas.

Polya, já em 1957, ressaltou contribuições favoráveis da atividade heurística para o ensino da matemática. Eis o que escreveu a esse respeito.

> "A Heurística moderna esforça-se por compreender o processo de resolução de problemas, especialmente as operações mentais, tipicamente úteis nesse processo. Dispõe de várias fontes de informação, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo sério da heurística deve levar em conta tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas, não deveria negligenciar aquilo que autores antigos como Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano disseram sobre o assunto, mas muito menos deveria negligenciar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem ser a base em que a heurística é construída. Nesse estudo, não deveríamos descurar de nenhum tipo de problema, e deveríamos buscar os aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda a sorte: deveríamos visar aos aspectos gerais, independentemente do assunto do problema. O estudo da heurística tem objetivos 'práticos': uma melhor compreensão das operações mentais tipicamente úteis na resolução de problemas poderia exercer uma influência benéfica sobre o ensino, especialmente sobre o ensino da Matemática." (POLYA, 1957, p. 129-130).

Conforme indicou Polya, muitos matemáticos se propuseram a refletir sobre a resolução de problemas com o enfoque na heurística. Pappus, matemático grego que viveu por volta do ano 300, escreveu um livro cujo título pode ser traduzido como *O Tesouro da Análise* (Arte de Resolver Problemas) ou *Heurística*, onde procurava sistematizar um método para resolver problemas. As mais famosas tentativas de sistematização da heurística foram realizadas pelos matemáticos Descartes e Leibnitz, bem como pelo filósofo Bernardo Bolzan e Poincaré que apresentou uma das mais expressivas descrições da atividade heurística em *Memórias sobre as Funções de Fuchs*, conforme ressalta Puchkin.

Polya organizou didaticamente os princípios da heurística. Segundo ele, o objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Polya concebe a matemática não como uma disciplina formal, mas enfatiza a sua correlação com a intuição, a imaginação e a descoberta, defendendo que se deve imaginar a ideia da prova de um teorema antes de prová-lo. Pode-se, dessa maneira, perceber que muitas vezes se erra e tem-se que descobrir outras saídas, o que acaba contribuindo para melhorar a capacidade de imaginar soluções: "O resultado do trabalho criativo do matemático é o raciocínio demonstrativo, a prova, mas a prova é descoberta por raciocínio plausível, pela imaginação" (POLYA, *apud* SCHOENFELD, 1992, p. 341.) Polya obteve destaque com seus trabalhos ao circunstanciar a matemática como resolução de problemas, colocando-a como o foco principal do saber matemático Polya chama-nos a atenção para o potencial das descobertas em matemática, do trabalho criativo dos alunos e da heurística na resolução de problemas. Percebe-se, portanto, que falar em heurística na resolução de problemas é falar sobre "métodos e regras que conduzem à descoberta, inovação, investigação e resolução de problemas". (VILANOVA, 2000).

COMPREENSÕES, NÃO COMPREENSÕES E RELAÇÕES DIDÁTICAS

Para compreender o processo ensino-aprendizagem em matemática por meio de resolução de problemas focado na heurística da resolução, analisou-se detalhadamente as entrevistas com os professores, os alunos e o modo como o conhecimento matemático perpassa as relações didáticas e a-didáticas. Os resultados revelam algumas lacunas e contradições presentes no movimento didático que ocorre na tríade professor, aluno e conhecimento matemático no processo de ensinar por meio da resolução de problemas. A heurística pode ser observada mais detalhadamente quando foi permitido ao aluno relatar oralmente ao professor suas estratégias e procedimentos na descoberta das soluções dos problemas.

Percebeu-se contradições entre as falas dos professores e dos alunos quando se verificou os entendimentos que têm sobre o que é um problema. As entrevistas mostraram elementos fundamentais ao processo de compreensão do movimento didático.

Havia problemas com enunciados curtos e outros com enunciados longos. Os longos tinham o objetivo de criar contextos para que os alunos identificassem uma situação configurada, a compreendessem e identificassem o conteúdo matemático que o resolvessem. Ato concomitante seria a elaboração de estratégia, autônoma, para a resolução.

O modo como resolveram e o modo como disseram que resolveram problemas com enunciado longo são extremamente contraditórios. Referente aos exercícios de aplicação direta de algoritmos identificou-se um discurso coerente com a prática, não contraditório. Os problemas com enunciados curtos foram praticamente todos resolvidos, sem grandes contestações ou "sombra de dúvidas" pelos alunos, o que pôde ser observado nas entrevistas. A justificativa quanto à preferência por enunciados curtos pareceu semelhante à dada em relação aos exercícios algorítmicos de "continhas", mais fáceis de ler, entender e resolver.

Perguntas que fogem do contexto estritamente numérico do problema mostram que o contexto linguístico dos problemas foram ignorados quando:

1. os alunos resolveram a maioria dos problemas com a aplicação direta de um algoritmo. Entendeu-se que tal atitude metodológica evidencia uma crença de que um problema de matemática só pudesse ser resolvido com algum tipo de cálculo ou algoritmo estruturado. Ou seja, uma ficha com exercícios e problemas de matemática não poderia ter questões sem cálculos, o que nos leva à hipótese de que os alunos imaginam ser desnecessário responder a perguntas de interpretação de texto, uma vez que a atividade era de matemática;

2. ao questionar os alunos sobre suas resoluções e escolha do procedimento algorítmico em determinados problemas, foram enfáticos em dizer que o diferencial estava no fato de ser possível, mesmo em enunciados longos, buscar por palavras-chave que façam alguma relação com a pergunta do problema. Dessa forma, a solução do problema seria algum tipo de conta com os números expostos no problema;

3. palavras como: *prestação*, *repartiu*, *juntou*, *perdeu,* entre outras, são procuradas pelos alunos para tornar possível elaborar um plano de ação, que necessariamente envolva algum tipo de operador matemático. Há uma crença

de que, se determinado dado numérico do problema não foi utilizado, então algo não vai bem na resolução, do contrário, *por que este dado estaria lá?* O fato apontado refuta a suposição de que um bom problema é aquele que tem enunciado longo na tentativa de criar contextos. Afinal, dizem os alunos que *garimpam* as palavras-chave que necessitam para solucionar o problema.

Percebeu-se que os professores tinham um pré-conceito em relação aos acertos e erros dos alunos nas resoluções dos problemas. Surpreendentemente, ao questionar os alunos quanto à forma como chegaram em determinada situação aparentemente errada, percebeu-se uma didática até então ofuscada na ação didática do professor dando vez então a um personagem atuante na ação didática: o aluno com didática própria.

Alguns alunos resolveram "de qualquer maneira", mas ao serem entrevistados sobre o modo como chegaram as sua soluções, assumiram um papel mais investigativo e deixaram transparecer o real entendimento que tiveram acerca dos problemas. No momento em que o aluno foi convidado a dizer o que pensa sem a interferência dos colegas de sala, e controle direto da dinâmica do professor, é que percebemos o que passamos a chamar de didática do aluno, ou seja, uma didática própria que emergiu quando os alunos se manifestaram ao reestruturar ou responder o questionamento do professor, quando justificou suas escolhas e procedimentos na resolução de um problema. Na justificativa das escolhas emergiu o pensamento criador decorrente do movimento heurístico dos alunos que possibilitou identificar o senso-lógico não só das respostas obtidas, mas do próprio processo de resolução, correto de pronto, ou não. Estaria aqui um embrião para uma concepção de resolução de problema como arte conforme perspectiva apontada por Schoenfeld?

Os professores afirmaram que procuram fazer um misto de atividades em suas aulas propondo problemas com enunciados longos e curtos. Para eles o importante é que as atividades façam o aluno pensar e contribuam para o desenvolvimento da autonomia na busca pela solução. Ao mesmo tempo disseram que problemas com enunciados longos não são muito utilizados por conta da dificuldade dos alunos em resolvê-los e do repúdio que eles têm pela interpretação dos textos. Para os alunos, problemas com enunciados longos são considerados muito difíceis de resolver. A justificativa deles é que problema

com muita informação atrapalha a busca por dados que o resolvam. Embora tais enunciados tenham a intenção de criar contextos para gerar significados às situações configuradas, a preocupação em valorizar e, não raras vezes, forçar contextos para a aplicação dos problemas redundou em atividade didática sem sentido para os alunos.

A resolução dos problemas nesta pesquisa mostrou diferentes perspectivas. Problemas com enunciados curtos ou com aplicação direta de algum algoritmo foram os mais apreciados pelos alunos, mas, em contrapartida, professores entendem que uma boa avaliação deveria ter problemas com enunciados curtos e longos. Justificam que avaliações institucionais cobram dos alunos questões de interpretação de texto. As avaliações institucionais a que se referiram são o Exame Nacional do Ensino Médio(Enem), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa), promovido pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE). O que de fato é uma contradição é o professor primar por problemas que ensinem ao aluno o pensar autônomo, mas, na prática, priorizem exercícios de aplicação direta de algoritmos. Professores e alunos têm compreensões diferentes sobre contextos de enunciados havendo inquietação no processo de resolução devido à falta de valorização e entendimento da situação envolvida. Em geral, a não compreensão dos enunciados impede a identificação do contexto pretendido.

A literatura tem evidenciado haver dicotomia entre a teoria e a prática docente, provocando reflexões entre teoria estabelecida e prática desenvolvida, levando-nos a refletir sobre o fato exposto. Martins (1998), Wachowicz (1989) e Oliveira (1993) dedicaram-se ao estudo da dicotomia existente entre teoria e prática escolar. Nesse sentido, o movimento didático na tríade, professor-aluno-conhecimento matemático, ora propiciou o movimento de criação de estratégias de resolução, ora repicou a tradicional atitude de busca de palavras chaves e de resoluções meramente algorítmicas.

Merecem destaque duas concepções que primam pelo debate dialético entre a produção de conhecimentos teóricos e conhecimentos práticos: a didática teórica embasada em Brousseau, (1978) e didática prática apoiada em Martins (1998): a primeira trata da disciplina acadêmica que se interessa por

descrever e explicar os estados e evoluções dos sistemas didáticos e cognitivos e a segunda se interessa pela problemática da tomada de decisões na aula, pela ação reflexiva em um lugar e tempo específicos.

A maior parte das dificuldades encontradas pelos alunos nas resoluções dos problemas, e que certamente só puderam ser analisadas após as entrevistas, diz respeito ao fato de que eles têm dificuldade de entrar no movimento didático. Não compreendem termos que o professor domina, não sabem o que o professor espera deles, não integram as supostas "regras do jogo". Nessa circunstância é inexistente qualquer ação reflexiva. A resolução de problema não se configura em estratégia de ensino que estimule a atividade heurística do aluno e necessite dele tomada de decisão para competente resolução.

De acordo com o discurso, os professores primam por atividades contextualizadas, mas na prática os alunos que foram entrevistados nos mostraram uma prática diferente da que os professores julgavam realizar, preferiram, e resolveram melhor, os exercícios de aplicação direta de algoritmos. No discurso, a prática de algoritmização e uso de formulários sem significado são condenados pelos professores, mas, de alguma forma, pelo próprio movimento didático da aula de matemática, ocorrem com frequência. A fala dos alunos nos mostrou acreditarem que problemas fáceis são aqueles com enunciados curtos e com pouca informação, da mesma forma que os exercícios de aplicação direta de algoritmos, sendo que estes mesmos, segundo os alunos e os professores entrevistados, não favorecem o pensar matematicamente, mas são muito utilizados, pois são mais fáceis de aprender.

Propaga-se ser a resolução de problemas o ponto de partida da atividade matemática. Melhor analisando a aplicação de diferentes tipos de problemas com enunciados longos e curtos com a intenção de criar contextos, percebeu-se que, dependendo do movimento didático estabelecido pela tríade aluno-professor-conhecimento matemático, nem mesmo servem de ponto de partida para a atividade matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concordamos com os autores que valorizam a resolução de problemas como potencializadores de processos heurísticos na aprendizagem em

matemática. Em relação aos entendimentos manifestados sobre a resolução de problemas, em especial o modo como o aluno pensa que faz e faz na prática, a que chamamos de didática prática do aluno, concluímos que se aproxima muito daquela didática prática explicitada em Martins (1998) e Warchovicz (1989).

O movimento didático na tríade aluno-professor-conhecimento matemático ora replicou a tradicional atitude de busca de palavras chaves ou de resoluções meramente algorítmica, ora propiciou o movimento de criação de estratégias de resolução para os problemas.

Algumas dificuldades dos alunos em resoluções dos problemas têm origem na dificuldade do aluno em entrar no movimento didático, ora por não compreenderem termos que os professores utilizam, ora por não saberem o que os professores esperam deles, ora por buscarem resoluções padronizadas para enunciados. Nessas circunstâncias, a resolução de problema não se configura em estratégia de ensino que estimule a atividade heurística do aluno e necessite dele tomada de decisão para resolução. As dificuldades percebidas inviabilizam a potencialidade didática da resolução de problemas como estratégia para o ensinar e para o aprender. Uma contradição evidente é o professor defender que problemas propiciam ao aluno o pensar autônomo, mas, na prática, priorizar exercícios de aplicação direta de algoritmos. Professores e alunos têm compreensões diferentes sobre contextos de enunciados havendo inquietação no processo de resolução devido ao não entendimento da situação configurada. Em geral, a não compreensão dos enunciados impede a identificação do contexto pretendido.

Em sentido oposto, quando houve movimento de criação de estratégias de resolução para os problemas, os dados evidenciaram que as relações didáticas estabelecidas na tríade aluno-professor-conhecimento matemático no processo de ensinar matemática por meio da resolução de problemas podem ser: potencialmente heurísticas: por mobilizarem a descoberta, o desenvolvimento da autonomia e a criação de diferentes estratégias para um mesmo problema; criadoras: por serem capazes de modificar e transformar conceitos vazios de significado em situações-problema com a valorização do senso-lógico das respostas; e motivadoras: por dar sentido aos diversos problemas que a matemática dá conta de resolver. Essas relações favorecem a ocorrência de

situações a-didáticas em que o aluno conjectura, elabora estratégias e descobre (heuristicamente) a solução do problema. Possibilita que construa conceitos pela experimentação e pelas relações que estabelece com os saberes e os conhecimentos que subsidiam um processo de aprendizagem. E o eixo que dá sustentação ao movimento didático, que torna notável não só a didática do professor, mas, principalmente a didática do aluno, é a resolução de problemas, responsável por, dialeticamente, aproximar os vértices da tríade em prol da dinamização do processo ensino-aprendizagem em matemática.

A identificação dessas relações didáticas tornou visível o movimento na tríade aluno-professor-conhecimento matemático, e colaborou para percepção do professor sobre múltiplas facetas de uma metodologia de ensino instrumentalizada pela resolução de problemas, como também colaborou para sua tomada de consciência da complexidade da dinâmica das relações, inter-relações e conexões em que sua própria atuação está compreendida.

Os resultados obtidos oferecem subsídios para que professores envolvidos com a prática docente escolar possam aperfeiçoar seus métodos para ensinar matemática tendo em vista o aprimoramento de sua ação didática por meio da resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

AMS, **American Mathematical Society.** NCTM 2000, Association Research Group Second Report. Notices of the AMS, February 1998.

BROUSSEAU, Guy. L'observation des activités didactiques. **Revue française de pédagogie**, n. 45, 1978.

CURRICULUM AND EVALUATION STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS (NCTM, 1989; **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar**, tradução APM - Portugal, 1991).

GUÉRIOS, E., **Espaços intersticiais na formação docente**: indicativos para a formação continuada de professores que ensinam matemática In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. (Orgs.). Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática, São Paulo, Musa, 2005, p. 128-151.

______. E., Espaços oficiais e intersticiais da formação docente: histórias de um grupo de professores na área de ciências e matemática. Tese (Doutorado) - UNICAMP, Campinas, 2002.

GUÉRIOS, E. GOSMATTI, A. FERNANDEZ, A., ZARAMELA, D. PERINE, G. Estudo de elementos componentes da prática didática e metodológica de professores que ensinam matemática, Encontro Paranaense de Educação Matemática, 10. **Anais...** Guarapuava, SBEM-PR, 2009.

KLAFKI, W. O pensamento dialético na pedagogia. **Formas do pensamento e métodos de pesquisa da ciência da educação**, v. 1, ed. S. Oppolzer, Munique, 1969.

KOWARZIK, W. S. **Pedagogia Dialética de Aristóteles a Paulo Freire**. Trad. Wolfgang Leo Maar. São Paulo: ed. Brasiliense, 1974.

LESTER, F. K.; D'AMBROSIO, B. S. Tipos de Problemas para a Instrução Matemática no Primeiro Grau. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Universidade do Estado de São Paulo, Rio Claro, n. 4, 1988, p. 33-40.

MARTINS, Pura Lúcia Oliver. **A Didática e as Contradições da Prática**. São Paulo: Papirus Editora, 1998.

NCTM. **Professional Standards for Teaching Mathematics.** National Council of Teachers of Mathematics, Virginia, 1991. Normas Profissionais para o Ensino de Matemática. Tradução da Associação de professores de Matemática, Portugal, 1994.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**. In: BICUDO, A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Ed. Cortez, p. 213-224, 2004.

POLYA, G. **How to Solve It?** 2. ed. New York, Double Anchor Book, 1957.

POLYA, G. **A Arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Ed. Interciência,1995.

POZO, J. I. (Org.). A Solução de Problemas - Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Editora Artmed, 1998.

PUCHKIN, V. N. **Heurística:** a ciência do pensamento criador. Rio de Janeiro, Zahar Ed., 1969.

SARRAZI, B. **La sensibilité au contrat didactique:** rôle des Arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique qu' cycle trois Thèse (Doctorat) – Université de Bordeaux II, 1996.

SCHOENFELD, H. A. Problem Solving in context(s). In: CHARLES, R.; SILVER, E. (Orgs.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** LEA e NCTM, Reston, 1989.

SCHOENFELD, H. A. **Learning to think mathematically:** problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.), New York: MacMillan, 1992.

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, L. P.; LEAL, C.; PONTE, J. P. (Eds.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996. p.61-72. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

STANIC, G.; KILPATRICK, J. 'Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum'. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. USA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989. p.1-22.

VILANOVA, S.; *et al*. Concepciones y creencias sobre la matemática. Una experiencia con docentes de 3er. Ciclo de la Educación General Básica. **Revista Iberoamericana de Educación**, Argentina, 2000.

WACHOWICZ, L. A. **O Método Dialético na Didática**. 2. ed. Campinas/SP: Papirus, 1989.

CAPÍTULO 11

A REGRA DOS SINAIS: ALGUNS ELEMENTOS IMPORTANTES DO SEU CONTEXTO HISTÓRICO

Selma Felisbino Hillesheim
Méricles Thadeu Moretti

Neste capítulo abordaremos alguns aspectos da história do número negativo, bem como do surgimento e da consolidação da regra de sinais da multiplicação desses números, que se mostram relevantes no contexto histórico geral. Uma história de incertezas, de idas e vindas e de muitas hesitações na aceitação da ideia de número negativo. A introdução conceitual dos números relativos foi um processo lento e surpreendente. A origem da regra de sinais é geralmente atribuída a Diofanto de Alexandria que viveu no século III depois de Cristo[1]. Diofanto não faz nenhuma referência aos números relativos, mas, em seu Livro I *Aritmética,* ele menciona: “Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos” (DIOFANTO, 2007, p. 22).

No período compreendido entre Diofanto e Hankel, muitos matemáticos se propuseram a construir uma demonstração para a regra de sinais pautada em exemplos práticos. Porém, Hankel em 1867, demonstra que a única das regras possíveis é aquela que preserva a distributividade à esquerda e à direita, isso porque ele aborda a ideia de número relativo numa outra dimensão, que não aquela procurada na natureza. Hankel[2] *apud* Glaeser (1981, p. 338), diferentemente de Laplace, que acreditava na existência de uma explicação para a multiplicação dos relativos na natureza, aborda a questão numa outra

---

[1] Não se sabe ao certo o período em que Diofanto viveu, mas de acordo com Eves (2004, p. 207), a maioria dos historiadores o situa no 3º século da nossa Era.

[2] HANKEL, H. **Théorie des complexen Zahlsysteme.** Leipzig: Leopold Voss, 1867.

dimensão, os números não são descobertos, são imaginados e a regra de sinais é pura invenção da mente humana, uma convenção.

Os motivos que nos impulsionaram a realizar essa pesquisa estão diretamente relacionados ao processo de ensino e aprendizagem desses números. Atuando há muitos anos como professores, percebemos que o ensino dos números relativos no ensino fundamental enfrenta problemas que acabam repercutindo ao longo da vida escolar dos alunos com repercussões, até mesmo, no ensino superior. A dificuldade enfrentada pelos alunos na aprendizagem da multiplicação de dois números negativos direcionou o tema deste trabalho, que faz parte da nossa pesquisa de mestrado (HILLESHEIM, 2013), a buscar subsídios históricos que possam nos ajudar a compreender tais dificuldades. A partir dessa pesquisa, acreditamos que esses aspectos históricos poderão trazer significativas contribuições para o entendimento das dificuldades encontradas pelos matemáticos, no passado, e sua estreita relação com as dificuldades encontradas hoje por nossos alunos no que tange o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos.

UM POUCO DA HISTÓRIA ANTIGA SOBRE OS NÚMEROS NEGATIVOS

A origem da regra de sinais da multiplicação de números negativos é, em geral, atribuída a Diofanto de Alexandria. Sobre ele pouco se sabe, até mesmo o período em que viveu. No entanto, os historiadores apontam evidências e tendem a situá-lo no século III de nossa era. Esse algebrista de nacionalidade desconhecida escreveu três trabalhos: *Aritmética*, *Sobre Números Poligonais e Prisma* (EVES, 2004, p. 207). A regra que estabelece que "- × - = +" aparece no começo do livro I da sua *Aritmética* de forma explícita: "Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos" (DIOFANTO DE ALEXANDRIA, 2007, p. 22). Porém, em nenhum momento Diofanto apresenta uma justificativa para tal regra. Ele apenas a usava nos cálculos intermediários e não aceitava as raízes negativas na solução das equações quadráticas (BOYER, 2010).

No oriente, a matemática assumiu um caráter prático voltado às questões administrativas, organizações públicas e cobrança de impostos. Não se encontra na matemática oriental registros de demonstrações ou argumentações sobre os cálculos, apenas uma prescrição de como aplicar as regras. Inicialmente,

foi dada ênfase à aritmética prática e a medição, no entanto, com o passar do tempo, fortes tendências levam a abstração, e a aritmética se transformou em álgebra (STRUIK, 1992).Contrariando a posição de Struik (1992), a respeito de não se encontrar na matemática oriental demonstrações sobre cálculos, Joseph (1991) defende, ao longo das 494 páginas do seu livro "La Cresta Del Pavo Real: las matemáticas y susraíces no europeas", a posição de que a atividade matemática fora da Europa tem sido ignorada, desvalorizada e distorcida. O autor afirma que existe certa resistência em relação aos conhecimentos matemáticos anteriores ao período da matemática grega, comparando-a com "rabiscos de criançasque estão aprendendo a escrever em oposição a grande literatura" (KLINE[3] *apud* JOSEPH, 1991, p. 32). Essa visão atribui à matemática egípcia e babilônica a ideia de que essas matemáticas não tinham regras gerais, careciam de demonstrações e não eram abstratas. Entretanto, não se pode negar que nas resoluções dos problemas que foram apresentadas por esses povos, tanto no papiro de Ahmes como nas tábuas babilônicas, "indicaria que existia uma compreensão da generalidade das regras subjacentes" (JOSEPH, 1991, p. 181). Assim, o autor reconhece que diferentes culturas, em diferentes momentos da história, têm contribuído para os conhecimentos matemáticos do mundo, cada qual com suas características próprias (JOSEPH, 1991, p. 34).

De acordo com Struik (1992), grande parte do que sabemos sobre os conhecimentos egípcios encontram-se em dois papiros: *Papiro de Rhind* e *Papiro de Moscovo*. Esses papiros apresentam problemas que estão baseados numa matemática pautada no sistema de numeração decimal. De acordo com Lumpkin[4] *apud* PONTES (2010) e ANJOS (2008), apesar da ideia de número negativo não ter sido registrada na civilização egípcia, eles já mostravam indicativos desses números ao utilizarem malhas quadriculadas na construção de pirâmides. Eles escolhiam uma linha no nível do chão como sendo a linha zero e numeravam as outras linhas como sendo cúbico acima de zero e abaixo de zero. Mesmo assim, de acordo com Eves (2004, p. 67), "a matemática do Egito antigo nunca alcançou o nível da matemática da Babilônia".

---

[3] KLINE, M. **Mathematics:** A Cultural Approach, Reading.Massachussets:Addson-Wesley, 1962.

[4] LUMPKIN, Beatrice. **The ancient Egyptian concept of zero and the Egyptian symbol for zero:** A note on a little known African achievement in the ethnomathematics**.** Study Group on Ethnomathematics (ISGEm) Newsletter, v. 11, n. 2, Jun 1996. Disponívelem: <http://web.nmsu.edu/~pscott/isgem112.htm.>Acessoem: 17 de abr. 2011.

Na civilização babilônica, perto do ano 2000 a. C., a aritmética da Babilônia já tinha se desenvolvido e passado para a álgebra retórica. Encontram-se registros que apontam que eles resolviam equações lineares e quadráticas e, também, problemas que envolviam equações cúbicas e biquadradas. No entanto, encontravam apenas raízes positivas. Sua geometria tinha base em problemas práticos relacionados com a medição, mas a forma geométrica era apenas uma forma de apresentar uma questão algébrica (STRUIK, 1992; EVES, 2004).

O estudo da matemática antiga chinesa pode ser encontrada na mais importante obra da matemática chinesa *Jiuzhangsuan-shu (Chiuchangsuanshu),* ou *Nove Capítulos da Arte Matemática*. Essa obra foi produzida, muito provavelmente, durante a dinastia Han (206 a. C. – 220 d. C.) e constitui um livro totalmente voltado à matemática. Sua matemática consiste num conjunto de problemas e uma série desses problemas conduziria a sistemas de equações lineares. A solução dessas equações lineares era efetuada por transformações de matrizes. E nessas matrizes é que encontramos pela primeira vez na história o registro de números negativos (STRUIK, 1992, p. 67). Um número negativo era representado traçando uma diagonal na sua última coluna, por exemplo, - 12 era representado por — ╲|| (JOSEPH, 1991, p. 207).

Parece que aos chineses a ideia de números negativos não causou problemas, já estavam acostumados a calcular manipulando duas coleções de barras vermelhas e pretas, correspondendo a números positivos e negativos, respectivamente. Contudo, os chineses não aceitavam a ideia de que um número negativo pudesse ser raiz de alguma equação, eram usados apenas como intermediários na execução de algum tipo de cálculo (BOYER, 2010). Em contraste à matemática chinesa, a história da matemática grega nos aponta que o conceito de número negativo não foi registrado nesse período. O principal objetivo da matemática grega expresso nos primeiros estudos foi o de compreender o lugar do homem no universo. Desta forma, a matemática auxiliaria a ordenar as ideias em sequências lógicas e a encontrar a ordem no caos. Dois grupos de pensadores merecem ser destacados na matemática grega. De um lado estavam os "sofistas" preocupados em desenvolver uma matemática mais voltada à compreensão do que à utilidade. E, de outro, os "pitagóricos" que davam importância ao estudo dos elementos imutáveis

da natureza e da sociedade. Estudavam geometria, aritmética, astronomia e música. A aritmética era especulativa e pouco tinha em comum com a dos babilônicos (STRUIK, 1992).

De acordo com Eves (2004), uma das características da matemática grega era a sua persistência com as rigorosas demonstrações, alcançando uma existência independente. Os gregos dispunham de duas maneiras principais para resolver equações simples: o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Ao que tudo indica, esses métodos se originaram dos pitagóricos. O forte apego que os gregos apresentavam com a geometria impossibilitou-os de ousarem em considerar os negativos como números, pois

> [...] para quem a geometria era um prazer e a álgebra um demônio necessário, rejeitaram os números negativos. Incapazes de ajustá-los em sua geometria, incapazes de representá-los por figuras, os gregos consideravam os negativos não exatamente como números (KASNER; NEWMAN[5] *apud* MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 51).

Segundo Struik (1992, p. 108), os matemáticos gregos fizeram uma separação entre “aritmética” e “logística”. A “aritmética” (*arithmoi*) era a ciência dos números que expressava um número natural, uma “quantidade composta por unidades”. Enquanto a “logística” era o cálculo prático que estava baseado num sistema de numeração que mudou com o tempo. Isso mostra que:

> Historicamente, os números negativos não surgiram na *contagem*, mas nos *cálculos*; ou seja, surgiram na Logística, mais explicitamente na resolução de equações. Isso se concretizou com Diofanto (*fl*. Século III), na sua obra *Arithmetiké*, que era essencialmente um trabalho da Logística Teórica. Nessa obra, Diofanto desenvolveu resoluções de equações usando implicitamente as regras de sinais, todavia desconsiderou a existência independente dos números negativos (ANJOS, 2008, p. 24, grifos do autor).

A matemática grega não aceitou a existência independente do número negativo, no entanto, as regras de sinais aparecem implicitamente na obra de Diofanto como uma tentativa de abreviar os cálculos. Diofanto não aceitou a ideia de número negativo isoladamente, estes aparecem somente como cálculos intermediários.

[5] KASNER, E; NEWMAN, J. **Mathematics and the Imagination.** Middlesex: Pelican Books, 1968.

ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS DOS NÚMEROS NEGATIVOS NA IDADE MÉDIA

A ciência chinesa influenciou e deixou sua marca na ciência de outras sociedades, por exemplo, o sistema decimal e os números negativos podem ter vindo da China para a Índia. No entanto, não podemos negar que a ciência indiana também exerceu influência sobre a China. "A influência indiana na China pode ser tão antiga como a introdução do budismo na China" (STRUIK, 1992, p. 128).

Os hindus se destacaram como calculadores, no entanto, sua geometria deixava a desejar, pois era muito empírica e, em geral, ligada à mensuração. Como eram excelentes aritméticos, deram importantes contribuições à álgebra. "Ao contrário de Diofanto, que procurava *uma qualquer das soluções racionais* de uma equação indeterminada, os hindus empenhavam-se em encontrar *todas as soluções inteiras possíveis*" (EVES, 2004, p. 256, grifos do autor). Na matemática hindu, o mais relevante matemático do século VII foi Brahmagupta (598-665). Segundo Boyer (2010), Brahmagupta fez contribuições importantes à álgebra ao considerar duas raízes, mesmo as negativas, como solução das equações quadráticas. Pela primeira vez, em sua obra, encontra-se a aritmética sistematizada dos números negativos e do zero. Sua obra fornece, também, as seguintes regras operatórias envolvendo os números negativos:

> Positivo dividido por positivo, ou negativo por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo. Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador (BOYER, 2010, p. 150).

No entanto, Brahmagupta complicou-se um pouco ao afirmar que 0/0 = 0, porém, para o caso de a/0 ele não se comprometeu. Outro matemático hindu que teve destaque na segunda metade da Idade Média foi Bhaskara (1114 - 1185). Ele foi responsável por preencher algumas lacunas apresentadas na obra de Brahmagupta como, por exemplo, o problema da divisão por zero. Na sua obra mais conhecida, o *Lilavati,* cujo título é o nome da sua filha, Bhaskara reuniu problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando suas novas observações. O *Lilavati* apresenta uma série de problemas sobre os itens prediletos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração, progressão aritmética e

geométrica e outros (BOYER, 2010, p. 152). Bhaskara, em um de seus livros, resolveu a equação $x^2 - 45x = 250$ encontrando as raízes $x = 50$ e $x = -5$ como solução do problema. Para a raiz negativa ele manifestou certo cepticismo. No entanto, não se pode desconsiderar que, de certa forma, os números negativos ganharam com isso uma vagarosa aceitação (STRUIK, 1992, p. 117).

No período de 650 a 750 os árabes não demonstravam muito interesse intelectual, foi somente na segunda metade do oitavo século que se observou um despertar cultural no Islã. Neste período foram chamados para Bagdá estudiosos da Síria e da Mesopotâmia, a cidade se tornou uma nova Alexandria. Durante o califado de al-Mamum estabeleceu-se em Bagdá uma “Casa da Sabedoria” onde se encontrava, entre os mestres, um matemático e astrônomo chamado Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi que escreveu obras de astronomia e matemática. Dentre essas obras, a mais importante foi *Al-jabrWa’lmuqabalah* da qual teve origem o termo álgebra. A álgebra apresentada nesta obra está mais próxima da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofante e de Brahmagupta. No entanto, nem al-Khowarizmi nem outros matemáticos árabes usaram a sincopação ou números negativos (BOYER, 2010, p. 156). As contribuições de al-Khowarizmi foram importantes no contexto histórico da matemática, pois foi ele uma das principais fontes pela qual os numerais indianos e a álgebra árabe chegaram à Europa (STRUIK, 1992, p. 122).

Outro matemático que também se destacou no campo da álgebra geométrica foi Omar Khayyam. Ele resolveu as equações cúbicas geometricamente, no entanto, não aceitava as raízes negativas e, com frequência, não encontrava todas as raízes positivas (EVES, 2004).

A matemática árabe sofreu influência das matemáticas grega e hindu. No entanto, a matemática árabe possui características próprias, em geral tinham uma boa e clara apresentação e uma organização sistemática dos cálculos. Apesar do conhecimento que os árabes tinham a respeito das regras que regem os números negativos, eles rejeitavam as raízes negativas e não utilizavam nenhum tipo de abreviatura ou símbolo de notação (BOYER, 2010).

Na Europa, com a expansão do comércio, o interesse pela matemática na Idade Média se espalhou vagarosamente. A matemática especulativa quase desapareceu nesse período, era apenas apreciada pelos filósofos escolásticos.

Os homens práticos estavam interessados na contagem, na aritmética e na computação. Desejos que foram influenciados diretamente pelo crescimento das cidades mercantis (STRUIK, 1992).

O *Liberabaci* – Livro do ábaco – de autoria de Leonardo de Pisa (1175-1250) constitui-se num manual para práticas comerciais transitando entre prática e teoria. Leonardo era filho de comerciante e nascido na cidade de Pisa, também conhecido como Fibonacci, escreveu esse livro no regresso da viagem que fez pelo oriente como mercador, nele constam várias informações aritméticas e algébricas recolhidas nas suas viagens (STRUIK, 1992).

Para Boyer (2010), Fibonacci foi, sem dúvida, o matemático mais original e capaz do mundo medieval e muito de sua obra era demasiada avançada para ser entendida pelas pessoas que viveram na sua época. Pycior[6] *apud* ANJOS (2008) assumiu que Fibonacci, em sua obra *Flos* (1225), aceitou os números negativos como raízes de uma equação. No entanto, Eves (2004), a respeito da obra *Liberabaci,* afirma que: “As raízes negativas e imaginárias não são admitidas e a álgebra é retórica” (EVES, 2004, p. 293).

> Conforme a maioria dos historiadores, a estrutura que Fibonacci seguiu nas resoluções das equações foi similar ao modelo propagado por al-Khowarizmi o que levaria a crer que Fibonacci usou demonstrações geométricas. Consequentemente, isso indicaria uma certa restrição à aceitação dos números negativos como raízes de equação, a qual só seria válido, para representação de dívidas (ANJOS, 2008, p. 30).

O uso dos números negativos passou a ser admitido com a expansão das relações financeiras no comércio, que favoreceu o aparecimento de uma estrutura de crédito. A ideia de tirar 8 de 5 apresentava um aspecto milagroso, assim

> [...] foi necessário esperar o surgimento de um sistema bancário com uma estrutura de crédito internacional, tal o que veio a aparecer nas cidades do norte da Itália (particularmente Florença e Veneza) durante o século XIV. A aparentemente absurda subtração 5 menos 7 tornou-se possível quando novos banqueiros começaram a permitir aos seus clientes sacar 7 ducados de ouro enquanto seus depósitos eram apenas 5 (SINGH[7] *apud* MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 52).

[6] PYCIOR, Helena M. **Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[7] SINGH, J. **Mathematical Ideas:** Their Nature and Use. London, Hutchinson and Co. Ltd.,1972.

Nesse contexto, o número negativo acabou sendo usado com finalidades contábeis. No entanto, apesar de útil, a ideia dos negativos associada a um débito não era satisfatória e não preenchia o requisito matemático da metáfora, principalmente quando se tratava da regra dos sinais (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

ELEMENTOS HISTÓRICOS IMPORTANTES A RESPEITO DOS NÚMEROS NEGATIVOS NA IDADE MODERNA

No início da Renascença a maior parte dos matemáticos tinha origem alemã ou italiana. Contudo, em 1484, foi composto na França um manuscrito intitulado de *Triparty em La science des nombres,* de autoria de Nicolas Chuquet. Nesse manuscrito, a segunda metade da última parte trata da resolução de equações, onde traz uma novidade importante: pela primeira vez, ao escrever 4x = -2, Chuquet expressou um número negativo isolado numa equação algébrica (BOYER, 2010).

Segundo Boyer (2010), o início do século XVI foi marcado por grandes algebristas alemães. Um deles Michael Stifel (1486-1567), ex-monge e professor de matemática em Jena, escreveu *Arithmetica integra* publicada em 1544. Essa obra apresenta-se dividida em três partes: os números racionais, números irracionais e álgebra. Dentre os vários assuntos que aborda, o aspecto mais importante é o seu tratamento sobre os números negativos, radicais e potências. "Usando coeficientes negativos em equações, Stifel pode reduzir a multiplicidade de casos de equações quadráticas ao que parecia como única forma; mas teve que explicar, por uma regra especial quando usar + e quando -" (BOYER, 2010, p. 193). Ele tinha conhecimento sobre as propriedades dos números negativos, embora não os aceitasse como raiz de uma equação e costumava chamá-los de "números absurdos".

Em 1545, muito dos problemas não resolvidos pela *Arithmetica integra,* com relação à resolução das equações cúbicas e quárticas, foram superadas e tornaram-se conhecidas com a publicação da *Ars magna* de Cardano (1501-1576). No entanto, deve ser mencionado que Cardano não foi o descobridor original da solução da cúbica e da quártica. Depois de um juramento de manter

segredo sobre a solução, conseguiu arrancar de Tartaglia a solução da cúbica.

Cardano era médico e um respeitado professor em Bolonha e Milão. Seguidor de al-Khowarizmi, pensava em equações com coeficientes numéricos específicos como representantes de classes gerais. Cardano encontrou dificuldades para resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ utilizando o seu método, pois ele conhecia a raiz 4 e, com a aplicação da regra, chegava-se a $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Cardano sabia que não existia raiz quadrada de número negativo, no entanto, não entendia como a sua regra faria sentido nessa situação. Ele chamava essas raízes de "números fictícios" ou "números falsos" correspondendo aos números negativos e suas raízes complexas (BOYER, 2010).

De acordo com Eves (2004, p. 307), a *Ars Magna* foi o primeiro grande tratado dedicado especialmente à álgebra, escrito em latim. Uma de suas importantes contribuições se deve ao fato de que nele se dá atenção às raízes negativas e ao cálculo de números complexos. Com a resolução das equações cúbicas, um novo tipo de número começa a aparecer: os negativos. Até o momento, os matemáticos podiam negar a existência de um número negativo ou de uma raiz quadrada negativa alegando que equações do tipo $x + 1 = 0$ e $x^2 + 4 = 0$ não são resolúveis. No entanto, com a resolução das cúbicas, sempre que as três raízes de uma equação são reais e diferentes de zero a fórmula de Tartaglia-Cardano leva ao cálculo de uma raiz quadrada negativa. Nesse contexto, aparece a figura de um algebrista italiano, Rafael Bombelli (1526-1573) que teve a brilhante ideia dos imaginários conjugados que levariam ao número real 4. Porém, as observações de Bombelli não contribuíram na resolução efetiva das cúbicas, pois só funcionava se ele conhecesse antecipadamente o valor de uma das raízes. Entretanto, Bombelli apontou o papel importante que os imaginários conjugados iriam desempenhar futuramente (BOYER, 2010, p. 197). A falta de suporte matemático expressado por Bombelli cedeu espaço ao simbolismo expressado por François Viète (1540-1603). Esse jurista francês, nascido em Fontenay, ligado à corte de Henrique IV, fez contribuições no campo da aritmética, álgebra, trigonometria e geometria. Mas, foi sem dúvida, na álgebra que ele deu as mais importantes contribuições. Segundo Boyer (2010, p. 208), "Viète introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vo-

gal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados". Desse modo, aparece pela primeira vez uma distinção entre o conceito de parâmetro e a ideia de quantidade desconhecida. Embora Viète tenha contribuído de maneira significativa no campo da álgebra, não considerava as raízes negativas. Fato que o impossibilitou de enunciar as relações entre raízes e coeficientes na resolução das equações cúbicas. Cabendo a Girard, em 1629, enunciar claramente essas relações. Girard, ao contrário de Viète, admitia as raízes negativas e imaginárias (BOYER, 2010).

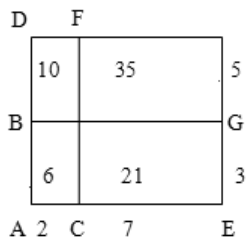
Outro matemático francês que se destacou foi René Descartes (1596-1650), natural de Touraine, residiu muitos anos na Holanda e morreu em Estocolmo. "Descartes procurava um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e *encontrar a verdade nas ciências*" (STRUIK, 1992, p. 162, grifos do autor). Assim como os platônicos acreditavam na harmonia do universo, os cartesianos acreditam num método geral baseado na razão. Na sua obra *La Géométrie*, publicada em 1637,inclui a aplicação da álgebra à geometria. O livro I fornece instruções detalhadas de como resolver as equações quadráticas geometricamente, contribuindo de certa forma para a não aceitação de raízes negativas, tomando-as como raízes "falsas" (BOYER, 2010).

O desconforto provocado pelos números negativos ainda perdurou por certo tempo. No entanto, percebe-se que tal assunto incomoda os matemáticos a tal ponto que se sentem desafiados a buscar uma explicação plausível para o assunto. Um exemplo é Simon Stevin (1548-1620), um importante matemático Belga do século XVI. Ele propôs, na sua "Aritmética" (1634), apresentar uma demonstração da regra de sinais que segue:

> Mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos dá produto mais; & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos. Explicação do dado: Suponhamos 8 – 5 multiplicado por 9 – 7 da seguinte maneira: - 7 vezes – 5 são + 35 (+ 35, porque, como diz o teorema, - vezes – dá +). A seguir – 7 vezes 8 faz – 56 (- 56, porque, como é dito no teorema, - por + dá -). E semelhante seja 8 – 5 multiplicado por 9, & darão produtos 72 – 45; depois adicione + 72 + 35, são 107. Depois adicione os – 56 – 45, são 101; e subtraindo o 101 de 107 resta 6, para o produto da tal

> multiplicação. Explicação do exigido. É preciso demonstrar pelo dado, que + multiplicado por + dá mais, & que – por – dá +, & que + por -, ou – por + dá -. Demonstração. O número a multiplicar 8 – 5 vale 3, & o multiplicador 9 – 7 vale 2. Mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6. Logo o produto acima também 6, é o produto verdadeiro. Mas o valor encontrado pela multiplicação, onde dissemos que + multiplicado por + dá produto +, & - por – dá produto +, & + por - ou – por + dá produto -, logo o teorema é verdadeiro.
>
> 8 – 5
> 9 – 7
> \- 56 + 35
> 72 – 45
> 6
>
> (GLAESER, 1981, p. 312)

Observemos que o argumento apresentado por Stevin é apenas uma verificação de um caso particular que não apresenta uma generalização. Outro aspecto que pode ser considerado é o fato que em nenhum momento ele considera a ideia de número negativo isolado, o sinal de menos que aparece, por exemplo, no 56 não representa um número negativo, mas apenas uma operação de subtração que precisa ser realizada para que o cálculo seja efetuado. No entanto, ele ainda prossegue com uma demonstração geométrica. Vejamos:

> Outra demonstração geométrica: Suponhamos AB 8 – 5 (a saber AD8 – DB5). Depois AC9 – 7 (a saber AE9 – EC7) seu produto será CB: ou seja, segundo a multiplicação precedente ED72 – EF56 – DG45 + GF35, os quais demonstraremos serem iguais a CB desta maneira. De todo ED + GF, subtraindo EF, & DG, resta CB. Conclusão. Logo mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos, dá produto mais, & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; o que queríamos demonstrar.
>
> D F
> 10 35 5
> B G
> 6 21 3
> A 2 C 7 E
>
> (GLAESER, 1981, p. 312)

O exemplo de Stevin nos mostra como a geometria oferece apoio à aritmética, contribuindo para a comprovação de que a regra funciona. Para Glaeser (1981), a demonstração geométrica apresentada por Stevin pode servir de base para o desenvolvimento geral de $(a – b) \times (c – d) = ac – ad – bc + bd$. No entanto, observamos que nesse período histórico a regra – × – = + só é usada como um procedimento transitório. O sintoma de evitamento dos números negativos, assim denominado por Glaeser (1981), vai continuar incomodando muitos matemáticos. Pierre Fermat (1601-1665) pode ser citado como exemplo ao fazer que seu amigo Jacques de Billy escrevesse conselhos sobre como proceder diante de uma "raiz falsa" no caso das equações diofantinas, a fim de se obter uma solução "aceitável" (GLAESER, 1981, p. 315). Outro personagem que mostrou uma insatisfação com relação aos negativos foi Thomas Harriot (1560-1621) que pensou ter provado em seu *"Artes Analíticas Aplicadas"* (1631) a impossibilidade das raízes negativas (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

Nesse contexto, podemos observar que mesmo os matemáticos que viveram na mesma época assumiram posturas contraditórias a respeito dos negativos. Enquanto Fermat e Harriot hesitavam com os negativos, Stevin e Euler faziam tentativas para demonstrar a regra de sinais, apesar de não obterem êxito em seus ensaios. Leonardo Euler (1707-1783) foi um importante matemático suíço que atuou em vários ramos da matemática. Euler, assim como outros matemáticos da época, também mostrou-se perturbado a respeito da regra de sinais e, na sua obra de cunho pedagógico intitulada "*Elementos da Álgebra*", destinada aos iniciantes, ele ofereceu uma explicação sobre a regra de sinais. Glaeser apresenta a argumentação de Euler em três partes, vejamos:

> 1. A multiplicação de uma dívida por um número positivo não oferece dificuldade: três dívidas de "a escudos" fazem uma dívida de "3 a escudos". Então $b \times (-a) = -ab$.
> 2. Pela comutatividade, Euler deduz que $(- a) \times b = - ab$.
> 3. Resta determinar o que é o produto (- a) pelo (- b). É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Se trata então de se decidir entre + ab e – ab. Mas como $(- a) \times b$ vale – ab, não resta mais como única possibilidade que $(- a) \times (- b) = + ab$ (!!!)
> (EULER,*apud* GLAESER, 1981, p. 319).

O malabarismo apresentado por Euler para justificar a regra de sinais demonstra que ele não tinha ainda conhecimentos suficientes para esclarecer convincentemente os pontos obscuros apresentados pela regra de sinais. Na mesma obra, segundo Glaeser (1981), Euler concebe o número negativo como sendo uma letra precedida com o sinal – (menos). Euler não consegue estabelecer uma ideia para a formação do conceito de número negativo, nem muito menos concebê-los como sendo quantidades menores que zero.

Para começar a mudança na questão da aceitação dos números negativos, o final do século XVII foi marcado pelo nascimento de um importante matemático chamado Colin MacLaurin (1698-1746). A sua obra "*Tratado da Álgebra*", publicado dois anos após a sua morte, tornou-se referência na Grã-Bretanha e sobre o continente. Nesse livro, ele aborda a ideia de número negativo como sendo uma quantidade tomada no sentido oposto à positiva.

> Assim, a quantidade negativa, bem longe de ser rigorosamente menos que nada, não é menos real em sua espécie que a quantidade positiva, mas ela é posta num sentido oposto; de onde não se segue mais que uma quantidade considerada única, não seria negativa; ela só é por comparação, e quanto a quantidade que chamamos positiva não há nada a mais que seja oposto a ele. Não se saberia subtrair uma maior: por exemplo, seria absurdo de querer subtrair uma maior quantidade de matéria de uma menor (MACLAURIN[8], *apud* GLAESER, 1981, p. 317).

MacLaurin não consegue conceber as quantidades negativas isoladamente, o que futuramente causará conflitos ao não fazer a distinção entre zero absoluto e zero origem. No entanto, de acordo com Pontes (2010), MacLaurin passa a entender o número como uma ação e não mais como um estado. Nessa mesma obra, segundo Glaeser (1981), MacLaurin apresenta uma justificação para a regra de sinais utilizando a distributividade da multiplicação em relação à adição e sua dedução contribuiu para o início de um formalismo até então inexistente. Sua explicação se baseava na seguinte ideia: Se $+ a - a = 0$, então se multiplicarmos essa expressão por um número positivo $+ n$, teremos o primeiro termo $+ na$, e como segundo termo $- na$, pois o produto também deverá ser zero, logo$- na + na$ também deverá ser zero. E quando a expressão $+a - a$ for multiplicada por um número negativo, esse produto também deverá ser

[8] MACLAURIN Colin (1748). **Traité d'Algèbreet de lamanière de Pappliquer**. Paris: C. A. Jomber 1753.

zero. Assim, se multiplicarmos a expressão $+a - a$ por $-n$, teremos $-na$ como o primeiro termo e $+na$ para o segundo termo, pois os dois termos precisam ser anulados. Dessa forma, ele enuncia a regra de sinais colocando que o produto de dois números com sinais diferentes é negativo, e o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo. Apesar das importantes contribuições de MacLaurin a respeito dos números relativos, ele não foi capaz de apresentar a teoria dos números relativos, mas seus estudos foram tomados como referência pelos matemáticos da posteridade.

OS NÚMEROS NEGATIVOS NA IDADE CONTEMPORÂNEA: O COMEÇO DE UMA NOVA HISTÓRIA

O século XIX, de acordo com Boyer (2010), mais do que qualquer outra época, merece ser considerada a Idade de Ouro da matemática. Dentre os muitos matemáticos que se destacaram nesse período, podemos citar o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Como seu pai era um artesão, então o duque de Brunswick, reconhecendo em Gauss uma criança prodígio, assumiu a sua educação. O jovem estudou em Göttingen e em 1799 obteve o grau de doutor. A sua carreira foi marcada por estudos realizados no campo da astronomia, geodésia e principalmente na matemática. Partes de suas descobertas foram publicadas na sua dissertação em 1799, onde deu a primeira prova do chamado “teorema fundamental da álgebra” e nas *Disquisitionesarithmeticae* de 1801. Estas correspondem a uma reunião de todos os trabalhos anteriores a Gauss que tratam sobre a teoria dos números, na qual Gauss faz importantes contribuições. Em 1831, Gauss, em um de seus tratados, apresenta uma nova teoria dos números complexos em que elucidou muitos enigmas apresentados na aritmética e a lei da reciprocidade quadrática se tornou mais simples que nos números reais. Gauss ao representar os números complexos por pontos num plano afastou para sempre o mistério que ainda assombrava os números complexos (BOYER, 2010; STRUIK, 1992).

O estilo de imprimir rigor à análise iniciado por Gauss no século XIX foi ampliado e aprofundado por Cauchy (1789-1857), o mais importante analista da primeira metade do século (EVES, 2004). Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris e, dentre as suas muitas contribuições na matemática, foi

ele o primeiro a estabelecer uma confusão entre os sinais operatórios e predicativos. Como operatórios, os sinais (+ ou -) poderiam designar uma ação: aumentar e diminuir. E, como predicativos qualificariam um estado: positivo ou negativo. No entanto, essas definições caíram em contradição quando Cauchy tenta justificar as propriedades aditivas dos relativos e, de repente, ele abandona o modelo metafórico e aborda a multiplicação de números relativos dogmaticamente. "O modelo metafórico apresentado no início, que facilita a compreensão das propriedades aditivas, é um obstáculo à compreensão da multiplicação" (GLAESER, 1981, p. 334). A discussão levantada por Cauchy a respeito dos sinais operatórios e predicativos irá posteriormente despertar o interesse de Hankel, mas nesse momento ele não consegue apresentar os números relativos de forma clara.

As dificuldades enfrentadas por Cauchy também podem ser percebidas em Pierre-Simon Laplace (1749-1827) nas suas conferências pedagógicas realizadas na Escola Normal Superior, declarando algumas dificuldades a respeito da teoria dos números relativos. Vejamos como Laplace apresenta a justificação da regra de sinais:

> (A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: temos apenas que conceber que o produto de –a por –b seja o mesmo que o de a por b. Para tornar essa identidade sensível, nós observamos que o produto de–a por +b é – ab (visto que o produto é –a repetido tantas vezes que quando tem unidades em b). Observamos em seguida que o produto de – a por b – b é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim o produto de – a por + b é – ab, o produto de – a por – b deve ser de sinal contrário ou igual à + ab para o destruir (*apud* GLAESER, 1981, p. 333).

Na sua justificativa observamos alguns aspectos familiares à demonstração apresentada por Euler, no entanto, Laplace consegue avançar no aspecto referente à demonstração da propriedade distributiva e o desapego a um modelo físico. Mesmo assim, Laplace não consegue propor uma extensão formal para os números relativos. Talvez isso possa estar ligado com a forma de Laplace apresentar suas demonstrações. Na sua maneira de escrever não explicava nada, quando satisfeito com o resultado, não se importava em deixá-los sem demonstração. A matemática, para Laplace, era como uma caixa de ferramentas a serem usadas na explicação da natureza (EVES, 2004, p. 486).

A partir da segunda metade do século XVIII surge na Inglaterra um grupo de matemáticos com o objetivo de reformar o ensino e a notação do cálculo. Dentre eles, George Peacock (1791-1858) que foi uma figura de destaque na reforma da matéria na Inglaterra, principalmente no que se refere à álgebra, pois lá ainda havia quem achasse que os números negativos não tinham validade (BOYER, 2010, p. 368). Peacock publicou em 1830 o "*Tratado em Álgebra*" e nessa obra ele apresenta uma distinção entre a álgebra aritmética e a álgebra simbólica. De acordo com Eves, a álgebra aritmética era considerada por Peacock "como sendo o estudo resultante do uso de símbolos para denotar os números decimais positivos usuais, juntamente com os símbolos operatórios, como o de adição e o de multiplicação, aos quais podem-se sujeitar esses números" (EVES, 2004, p.576). Dessa forma, apenas as operações com números inteiros positivos seriam possíveis. Ao contrário, a álgebra simbólica

> [...] adota as regras da álgebra aritmética, mas remove todas as restrições: assim a subtração simbólica difere da mesma operação na álgebra aritmética pela permissão do uso de todas as relações de valor dos símbolos ou expressões utilizadas (PEACOCK[9]*apud* ASSIS NETO, 1995, p. 7).

Essa justificativa apresentada por Peacock, em que ele transita de uma álgebra para outra, era chamada por ele como "*princípio de permanência das formas equivalentes*".

> Para incluir os novos símbolos -1, -2, -3,... em uma aritmética ampliada a qual englobe tanto os inteiros positivos como os negativos nós devemos, certamente, definir operações com eles de um modo tal que as regras originais das operações aritméticas sejam preservadas. Por exemplo, a regra $(-1)\times(-1) = 1$ a qual estabelecemos para governar a multiplicação de inteiros negativos, é uma consequência do nosso desejo de preservar a lei distributiva $a.(b + c) = ab + ac$. Pois se nós tivéssemos estabelecido que $(-1) \times (-1) = -1$, então, fazendo $a = -1$, $b =1$, $c = -1$, nós deveríamos ter tido $-1.(1 – 1) = -1 – 1 = -2$, enquanto por outro lado nós realmente temos $-1.(1 -1) = 1 \times 0 = 0$. Levou muito tempo para que os matemáticos percebessem que a 'regra dos sinais', junto com todas as outras definições governando os inteiros negativos e frações não podem ser 'provadas'. Elas são criadas por nós com o objetivo de obter liberdade de operação ao mesmo tempo que preservando as leis fundamentais

[9] PEACOCK, Georg. **A Treatise on Algebra**, Vol. I, Arythmetical Algebra. Reprint 1940. New York: Scripta Mathematica, 1842.

> da aritmética. O que pode – e deve – ser provado é apenas que com base nestas definições as leis comutativa, associativa e distributiva da aritmética são preservadas (COURANT; ROBBINS[10] *apud* MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 56).

Essa visão moderna apresentada por Peacock, fazendo valer para a álgebra simbólica as mesmas regras da álgebra aritmética, provoca uma verdadeira evolução para a formação da teoria dos números relativos.Como consequência das contribuições de Peacock, o alemão Hermann Hankel (1839-1873) publica em 1867 a obra *Theorie der KomplexenZahlensysteme* que amplia o conceito de número de uma forma mais clara e explícita. Ele observava que "a condição para construir uma aritmética universal é, pois, uma matemática puramente intelectual, desligada de todas as percepções" (BOYER, 2010, p. 389). Assim, como fez Peacock, Hankel também estabeleceu um *Princípio da permanência das leis formais:*

> Quando duas formas da arithmetica universalis expressas em símbolos gerais são iguais entre si, elas devem permanecer iguais entre si mesmo quando os símbolos deixam de designar simplesmente grandezas, e dessa forma também as operações podem obter qualquer outro conteúdo (HANKEL[11]*apud* ASSIS NETO, 1995, p. 7).

Pautado nesse princípio de permanência e conhecendo as propriedades aditivas de $\mathbb{R}$ e a multiplicação de $\mathbb{R}^+$, Hankel propõe prolongar a multiplicação de $\mathbb{R}^+$ para $\mathbb{R}$ e enuncia o seguinte Teorema: "A única multiplicação sobre $\mathbb{R}$, que prolonga a multiplicação usual sobre $\mathbb{R}^+$, respeitando as distribuições (à esquerda e à direita), é conforme a regra de sinais":

> Demonstração:
> 0 = a × 0 = a × (b + opp b) = ab + a × (opp b)
> 0 = 0 × (opp b) = (opp a) × (opp b) + a × (opp b)
> De onde
> (opp a) × (opp b) = ab
> (GLAESER, 1981, p. 338)

[10] COURANT, R; ROBBINS, H. Wat is Mathematics? An elementary Approach to Ideas and Methods. New York, Oxford Univ. Press, 1987.

[11] HANKEL, Hermann.**Théorie der complexenZahlensysteme**. Leipzig: Leopold Voss, 1867.

Observamos que, de certa maneira, essa demonstração pode ser encontrada em documentos anteriores, no entanto, Hankel, ao contrário de Laplace, que procurava uma explicação na natureza, aborda a multiplicação dos números relativos como uma extensão das propriedades dos números reais positivos para os reais. Dessa forma, a regra de sinais é uma convenção para manteruma consistência interna da própria matemática.

> Não é possível pronunciar-se tão acirradamente contra uma visão tão divulgada que essas equações [as regras dos sinais] jamais possam ser provadas em matemática formal; elas são convenções arbitrariamente estabelecidas para que se preserve o formalismo já existente nos cálculos. [...] Contudo, uma vez definidas, todas as demais leis da multiplicação derivam delas por necessidade (HANKEL[12] *apud* SCHBRING, 2007, p. 6).

A revolução cumprida por Hankel que recusa a busca por um bom modelo, segundo Glaeser (1981), consiste em abordar os números numa outra perspectiva. Não podemos mais procurar exemplos práticos que explicam os números relativos por analogias, pois esses números não são mais descobertos, mas inventados, imaginados.

No transcorrer da história da construção dos números relativos, percebemos que, enquanto os matemáticos estavam presos em buscar exemplos que explicavam esses números, eles não fizeram grandes progressos. A difícil aceitação dos números negativos que se fez presente durante todo esse percurso ainda se mostrou presente por certo período, mesmo após a revolução cumprida por Hankel.

Schubring (2007) mostra exemplo de calorosos debates acadêmicos ocorridos na comunidade de professores de matemática a respeito da hesitação dos relativos. Mencionaremos um trecho de Hoffmann (1884)[13], citado por Schubring, onde posta um cenário de horror e consequências drásticas para o ensino da matemática, se os professores tiverem que dizer aos alunos que a regra de sinais é uma convenção: "Eu temerei ver os olhos de surpresa

[12] HANKEL, Hermann. **Theorie der complexen Zahlensysteme:** insbesondere der gemeinenimaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionennebstihrergeometrischen Darstellung. Leipzig: Voss, 1867.

[13] HOFFMANN, J.C.V. **Zweiwichtige Fragenüber das Negative, beantwortetvom Herausgeber.** Zeitschriftfürmathematischenundnaturwissenschaftlichen Unterricht, v. 15, p. 580-582, 1884.

e de espanto dos alunos. Alunos inteligentes sobreviveriam com perguntas: Isso é verdadeiramente arbitrário? Não se pode demonstrar?" (2007, p. 17).

> Carlo Bourlet em 1896 introduziu na França um manual de ensino secundário sobre os números relativos. Nele ele apresenta as propriedades aditivas dos números relativos baseados sobre o modelo comercial e sobre a referência de um ponto sobre um eixo. Contudo, no capítulo seguinte, a multiplicação logo se mostra dogmática (GLAESER, 1981, p. 343).

Apesar da aceitação do conceito de número negativo e suas operações, na comunidade dos matemáticos profissionais, após a publicação de Hankel, na comunidade de professores esse debate ainda perdurou por muito tempo. A resistência dos professores em aceitar que a regra de sinais para a multiplicação de dois números negativos não pode ser provada e que precisa ser "mais" para preservar o formalismo matemático já existente foi um fator de destaque no percurso histórico da aceitação da regra de sinais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho nos mostra que historicamente o processo de consolidação do conceito de número negativo sofreu hesitações tanto na comunidade dos matemáticos, quanto na comunidade dos professores. A ideia de número negativo atrelado ao pensamento concreto travou durante um longo período histórico o debate a respeito da multiplicação desses números. A procura por um bom modelo que explicasse a multiplicação - × - = + só se resolve quando a matemática acadêmica assume que não há significado na natureza que explique esse produto.

Dentre as várias possibilidades para a regra dos sinais para a multiplicação, a escolha recaiu sobre aquela regra que preserva as distributividades à esquerda e à direita, conforme foi apresentada por Hankel. Estas propriedades já são observadas longamente na história desde Diofanto de Alexandria, quando tratadas com os números positivos, e é bastante natural procurar prolongá-las também para o caso dos negativos. Acreditamos que seja este um dos aspectos que deve guiar o ensino da regra dos sinais no ensino básico: para campo aditivo, modelo do prolongamento dos números naturais para a reta numérica dos inteiros como sugerido nos PCNs (BRASIL, 1998); para o campo

multiplicativo, o modelo baseado no Teorema de Hankel que tem por base a ideia de extensão da propriedade da distributividade dos números positivos para o caso dos números negativos.

Os elementos históricos apontados por este estudo nos mostram a necessidade de evitar os modelos concretos para o ensino da adição dos números inteiros relativos, pois esse mesmo modelo pode trazer obstáculos para a compreensão da multiplicação de dois números negativos. Por exemplo, Carlo Bourlet em 1896 demonstrou, em seus manuais escolares, que o ensino da adição de números inteiros pode ser facilmente compreendida utilizando-se o modelo metafórico, mas não conseguiu utilizar-se desse mesmo princípio para explicar a multiplicação entre dois números negativos.

Agora, fazendo uma ponte desse contexto histórico aos nossos dias atuais, podemos nos perguntar: Depois de passados mais de um século, quais as reais mudanças apresentadas em nossos livros didáticos? Como acontece o processo de ensino dos números relativos para as nossas crianças de hoje? São reflexões que fogem ao escopo desse trabalho, mas são questões importantes para pesquisasno que tange o processo de ensino e aprendizagem dos números negativos.

REFERÊNCIAS

ANJOS, M. F. **A difícil aceitação dos números negativos**: um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862). Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_86.pdf>. Acesso em: 10 out. 2012.

ASSIS NETO, F. R. de. Duas ou três coisas sobre o "menos vezes menos dá mais". Semana de Estudos em Psicologia da educação matemática: Livro de Resumos, 1995, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 1995.

BOYER, Carl. **História da matemática.** São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/CEF, 1998.

DIOFANTO DE ALEXANDRIA. **La aritmética y el libro sobre los** números poligonales.Tres canto: Nivola Libros Ediciones, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP : Ed. UNICAMP, 2004.

GLAESER, George. Epistemologie des nombres relatifs. **RDM,** v.2, n.3, 1981.

HILLESHEIM, S. F. **Os números inteiros relativos em sala de aula**: perspectivas de ensino para a regra de sinais. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2013.

JOSEPH, G. G. **La Cresta Del Pavo Real**: las matemáticas y SUS raíces no europeas. Madrid: Pirâmides, 1991.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. Números negativos: uma história de incertezas. **Bolema,** Rio Claro, v. 7, n. 8, p. 49-59, 1992.

PONTES, M. O. **Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade**: a polêmica multiplicação de números inteiros. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

SCHUBRING, G. Um outro caso de obstáculo epistemológico: o princípio de permanência. **Bolema,** Rio Claro, Ano 20, n. 28, p. 1-20, 2007.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Lisboa: Gradiva, 1992.

CAPÍTULO 12

FORMAÇÃO DE PROFESSORES E O USO DE TECNOLOGIAS NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: QUE ELEMENTOS CONSIDERAR?

Marceli Behm Goulart
Ana Lúcia Pereira Baccon

INTRODUÇÃO

A sociedade contemporânea sofreu transformações estruturais nas últimas décadas que acabaram afetando o contexto escolar e confrontam a escola com o grande desafio de formar cidadãos para esse mundo tão complexo (KENSKI, 2007). Diante desse impasse para lidar com as exigências crescentes do mundo atual, surgem novos questionamentos em relação à formação inicial e continuada de professores, na identidade desse profissional (PIMENTA, 1999), no papel social da escola e na educação. Hoje exige-se um saber e saber-fazer dos professores, diferente, em certos aspectos, dos saberes que eram necessários para educar os alunos em décadas passadas, ou seja, o que funcionava como pivô na relação professor e aluno, hoje já não funciona mais.

Ainda não existem respostas para as problemáticas e impasses que o contexto escolar vem apresentando a partir dessas transformações na sociedade contemporânea, mas o professor pode enfrentar toda essa situação sem uma crise de identidade? Como pensar a formação de professores para atuar nesse novo século, na nova sociedade, cheia de novas expectativas, com uma variedade de paradigmas e com uma mega diversidade imperando nas convivências? Diante desse novo cenário o professor está realmente preparado para exercer sua função dentro dessa nova sociedade? Diante das mudanças

provocadas pela atual sociedade e do caos que encontramos em muitas salas de aula, o professor encontra-se preparado por desempenhar seu papel, seu ofício, como formador, como educador?

É preciso pensar na formação desse profissional a partir dessas mudanças, desse novo cenário. Dentre as transformações ocorridas na sociedade contemporânea, podemos destacar o desenvolvimento das tecnologias, as mídias eletrônicas, a informática, que a cada dia evoluem em uma velocidade desenfreada. Podemos destacar que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) têm alterado profundamente a economia, a política, a cultura, a geografia, o mundo do trabalho, a saúde, a ecologia, a forma de conviver das pessoas, de acessar informação, de comprar e de se comunicar, de se relacionar com os outros e consigo mesmo, de se divertir, além de transformações em muitas outras áreas, atividades e possibilidades até então inimagináveis, que atingem diretamente a vida do homem no mundo e em sociedade.

Diante de todo esse processo de mudanças que acabaram afetando diretamente o contexto escolar é que o presente capítulo tem como objetivo discutir a formação de professores e o uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de matemática, bem como os elementos que devem ser considerados nesse processo.

FORMAÇÃO DE PROFESSORES

As últimas décadas têm sido marcadas por uma tendência em educação que tem buscado discutir e refletir sobre o papel da Educação na construção da cidadania como ferramenta indispensável para a relação do sujeito enquanto ser social. Cabe à educação garantir o acesso ao conhecimento, a aprendizagem de saberes e habilidades indispensáveis para a vida em sociedade, em comunidade.

A Constituição Federal Brasileira destaca no artigo 205 que: “A educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho”. Ou seja, garante não só a qualificação profissional, mas o “pleno” desenvolvimento da pessoa, incluindo o direito de estar preparado para o “exercício da

cidadania" para que todos tenham condições de ocupar seus lugares na sociedade de forma justa, solidária e democrática. Enfim, que a escola realmente cumpra a sua verdadeira função social.

Comprometida com a democratização da educação brasileira e na busca de cercear o direito apontado acima a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação, Lei 9394/96) no artigo 2° destaca a necessidade de se conhecer o aluno e o cotidiano em que ele vive, a fim de prepará-lo para o exercício da cidadania, onde podemos dar à Educação um olhar como um ato político. Ou seja, traz também artigos que tratam especificamente da formação dos profissionais da educação e alguns nos parecem significativos por conceberem a formação inicial e permanente como um processo contínuo e por destacarem a importância da prática docente.

A formação de professores designada como formação inicial ocorre no ensino superior e é orientada pela LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação, Lei 9394/96). Esta lei fundamenta todas as modalidade de ensino e no que restringe à Educação Superior vem destacado no capítulo IV no artigo 43 como finalidade:

> I - estimular a criação cultural e o desenvolvimento do espírito científico e do pensamento reflexivo;
> II - formar diplomados nas diferentes áreas de conhecimento, aptos para a inserção em setores profissionais e para a participação no desenvolvimento da sociedade brasileira, e colaborar na sua formação contínua;
> III - incentivar o trabalho de pesquisa e investigação científica, visando o desenvolvimento da ciência e da tecnologia e da criação e difusão da cultura, e, desse modo, desenvolver o entendimento do homem e do meio em que vive.

Portanto, o objetivo da educação superior perpassa desde o preparo do profissional, bem como a sua formação contínua ao espírito científico e reflexivo para que este entenda e atue na sociedade, no meio em que vive. No artigo 62, a LDB prevê, ainda, a formação de profissionais da educação, visando preparar o futuro professor para atender os objetivos da educação:

> A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em universidade e institutos superiores de educação, admitida, como formação mínima

> para o exercício do magistério na educação infantil e nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade Normal (Lei 9.394/96:71).

No artigo 61 apresenta os fundamentos dessa formação para atender aos objetivos dos diferentes níveis e modalidades de ensino e as características de cada fase do educando, futuro professor:

> I-A associação entre teoria e prática, inclusive a capacitação em serviço;
> II- Aproveitamento da formação e experiências anteriores, em instituição de ensino e outras atividades do cotidiano;

Podemos destacar a importância das instituições formadoras de professores estarem abertas às inovações, às novas perspectivas para que deem conta de formar profissionais que terão a missão de educar, de preparar para a conquista do exercício da cidadania nossas crianças e jovens das escolas públicas, cidadãos do século XXI, em qualquer lugar do Brasil. Portanto, destacamos a importância e relevância do professor no processo educacional e de seu papel como agente transformador da realidade, da sociedade. Nesse sentido, Perez (1995, p. 29) destaca que "o professor precisa refletir sobre a concepção de escola como instituição que transmite o conhecimento e como local que ajuda o aluno a desenvolver o seu potencial, que ensina a pensar, que o ajuda a descobrir caminhos para transformar a sociedade em que vive".

Dentro do contexto de formação de professores acredita-se que a identidade e "a autonomia profissional do professor se constroem a partir da reflexão sobre a sua prática pedagógica e sobre os contextos nos quais ela está inserida. Nesta perspectiva se dá a formação do professor reflexivo (ZEICHNER, 1993; SCHÖN, 1992), na qual o professor reflete na ação, revendo e transformando sua prática" (BACCON, 2011, p. 25).

É nesse mesmo contexto de formação de professores que se dá a construção dos saberes docentes. Baccon (2005, p. 12) destaca que Tardif (2002) aponta que o ato de ensinar, em si, não se define somente na pessoa do professor, mas todo esse conjunto se constrói por meio da relação professor e aluno, por mais complexa que ela se apresente. Podemos destacar, ainda, que essa relação é importante para ambos, pois como destaca Tardif (2002, p. 12):

"um professor nunca define sozinho e em si mesmo o seu próprio saber" e que: "[...] o saber não é uma substância ou um conteúdo fechado em si mesmo; ele se manifesta através de relações complexas entre ver no próprio cerne do saber dos professores a relação com o outro, e principalmente, com esse outro coletivo representado por uma turma de alunos" (TARDIF, 2002, p. 13).

Para pensar a formação de professores na sociedade contemporânea é preciso considerar não apenas a construção dos saberes docentes e a realidade do contexto escolar em que este está inserido, mas também, numa perspectiva de totalidade social, como uma construção política, como um ato político.

TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TICS) NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Entre as várias dimensões que interferem nessa integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática (epistemológica e semiótica, cognitiva, institucional, instrumental e a dos professores) destaca-se a dimensão do professor, já que ele é o ator central da integração (ARTIGUE, 1994; LAGRANGE, 2003).

Especificamente sobre a formação de professores para o uso de tecnologias, a Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (2002a) publicou uma lista de condições essenciais para a integração das (TICs) nos cursos de formação de professores, que fora previamente organizada pela *International Society for Technology in Education* no documento intitulado *National Educational Technology Standards for Teachers*, tais como: visão compartilhada entre todos os envolvidos na formação de professores (incluindo o setor administrativo); acesso à tecnologia, assistência técnica; avaliação constante sobre a eficiência das TICs na aprendizagem; políticas e comunidades de suporte; ensino centrado no aluno; professores habilitados para o uso das TICs para a aprendizagem, conhecedores do conteúdo, das metodologias e das TICs; importância de fornecer o acesso consistente ao desenvolvimento profissional porque a tecnologia muda constantemente, devendo estar disponível a todos que participam da preparação de professores.

Este documento da UNESCO apresenta algumas estratégias básicas para o desenvolvimento profissional de professores, especificamente para a integração das TICs, considerado como um processo contínuo e que não devem ser pensados como uma injeção de treinamento e cursos:

a) é muito mais importante estar focalizado no processo de ensino e de aprendizagem do que no conhecimento de softwares e hardware, ou seja, não somente habilitar os formadores de professores para compreender e usar o computador em suas práticas de ensino, mas compreender como o computador pode ser integrado às novas formas de compreensão do ensino e da aprendizagem. Tudo isso respeitando a área de conhecimento específico dos professores, ajudando-os a construir práticas inovadoras que possam contribuir com a prática dos futuros professores. Este deslocamento é extremamente relevante já que oferece ao futuro professor sustentação para um processo de aprendizagem contínuo, tão necessário diante das evoluções constantes das tecnologias e dos níveis cada vez mais elevados de competência das gerações mais novas;

b) é preciso conhecer o que os professores querem saber, para, então, mergulhar as TICs no processo de formação continuada e tornar mais eficiente a construção de conhecimentos e habilidades;

c) precisa-se contar com o acesso aos recursos, ao tempo e suporte necessários para aplicar os novos conhecimentos e habilidades aprendidas para o uso das TICs, sem os quais qualquer atividade planejada pode se tornar inútil;

d) o oferecimento a pequenos grupos de professores permite que sejam atendidos os interesses específicos dos participantes;

e) o planejamento e a execução devem ser conduzidos por um grupo de planejamento que inclua representantes e peritos em formação de professores, administradores do programa, dos professores, dos administradores da escola, de tecnologia e líderes da comunidade. As perspectivas dos diversos grupos devem fornecer uma compreensão das realidades da sala de aula, dos novos caminhos do processo de ensino e de aprendizagem, de conhecimento da disposição das tecnologias que podem ser usadas para realçar a aprendizagem e da opinião da comunidade. É também útil ter um grupo maior consultivo que

possa facilitar esforços do desenvolvimento e compartilhar recursos através das organizações relacionadas entre a universidade e as escolas.

Uma das principais fases do processo de planejamento e definição de estratégias e fontes para o desenvolvimento dos componentes do plano para a integração das TICs num programa de formação de professores é a avaliação e análise. As principais etapas desta fase de planejamento são apresentadas pela Unesco (2002a, p. 120, tradução nossa):

> a) compreensão das tendências na aplicação da tecnologia na aprendizagem;
> b) avaliação dos recursos e as facilidades de acesso da tecnologia no programa de formação de professores;
> c) desenvolvimento de um plano para comunicar-se com as partes interessadas;
> d) rever os padrões de competência nacionais, estaduais ou institucionais para os futuros professores;
> e) análise dos resultados das avaliações dos alunos;
> f) avaliação dos programas de formação de professores, considerando em que medida a tecnologia é integrada no currículo e nas práticas de ensino dos formadores de professores;
> g) identificar os estágios no uso da tecnologia e competência dos professores;
> h) identificar as necessidades de formação dos professores e a sustentação tecnológica para isto.

A seguir serão apresentadas algumas possibilidades de identificação dos estágios no uso da tecnologia e competência dos professores de matemática, por acreditar-se que os mesmos são elementos importantes a serem considerados na formação continuada e/ou inicial de professores de matemática e pesquisas na temática.

MODELOS DE AVALIAÇÃO NO USO DAS TECNOLOGIAS POR PROFESSORES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Primeiro modelo: Goos *et al.* (2003)

Um dos trabalhos que versa sobre uma forma de avaliar o uso de computadores no ensino da matemática é um estudo longitudinal de três anos, em

turmas com alunos de 11 a 12 anos de uma cidade australiana. Goos *et al.* (2003) apresentam quatro papéis da tecnologia (calculadoras gráficas e computador) com relação às interações entre ensino e aprendizagem. Essas interações em sala de aula estão estruturadas por quatro metáforas para teorizar a variação no grau de sofisticação com que tais professores e alunos trabalharam com tecnologia, e são descritas a seguir:

a) tecnologia como mestre: professores e estudantes podem ser subservientesà tecnologia se seus conhecimentos e uso são limitados a um estreito repertório de operações sobre os quais eles têm competência técnica. No caso dos professores, a falta de conhecimento e experiência nesta área o torna relutante em permitir que os alunos usem a tecnologia para explorar um território matemático não autorizado, e a sua falta de autonomia pessoal no uso dele impõe um controle rigoroso da lição na forma de apresentar – geralmente através de comentários matemáticos e explanações acompanhadas do silêncio do aluno;

b) tecnologia como serva: aqui a tecnologia é usada como um rápido e confiável substituto para os cálculos mentais ou feitos com lápis e papel, mas as questões de sala de aula permanecem imutáveis. As vantagens identificadas pelos alunos no uso das TICs comparadas ao lápis e papel ficam restritas a rapidez e eficiência, redução dos erros de cálculo e utilidade para conferir resultados. O computador é uma ferramenta suplementar que amplia o processo cognitivo, mas não é utilizado num caminho criativo para mudar a natureza das atividades. Há um grande nível de estagnação didática, e, sobretudo, curricular: fazer as tarefas antigas com a tecnologia, a mesma matemática de sempre com outros recursos; o professor tenta impressionar o aluno utilizando-se das tecnologias como fachada. O professor utiliza a tecnologia para fazer exatamente o que sabe fazer sem ele, submetendo-a ao seu conhecimento restrito;

c) tecnologia como parceira: a tecnologia é usada criativamente para aumentar o poder dos alunos sobre a sua aprendizagem, provendo acesso a novas questões ou novas formas de aproximação de questões. Esse efeito de reorganização cognitiva pode envolver o uso das tecnologias para facilitar o entendimento, explorar diferentes perspectivas provendo acesso a novos tipos de questões ou mediando as discussões na sala de aula;

d) tecnologia como extensão do self: o modo mais sofisticado de uso envolve a incorporação de perícia tecnológica como uma parte natural do seu repertório matemático e/ou pedagógico. Os estudantes podem integrar uma variedade de fontes tecnológicas na construção de um argumento matemático. Há um senso de autonomia que mistura os limites entre mente e tecnologia.

Frota e Borges (2004, p. 3) ampliam o modelo de Goos *et al.* (2003) adicionando uma categoria denominada "matematizar a tecnologia", entendendo que as tecnologias

> [...] além de desempenharem os papéis de recurso de ensino e de aprendizagem, e de ferramenta e de instrumento de pensar, podem tornar- se fontes de renovação de abordagens curriculares de temas consagrados na educação Matemática básica e universitária, bem como fontes de novas temáticas para o currículo de Matemática. Discutimos a seguir cada uma dessas três categorias, procurando relacioná-las às concepções de tecnologia subjacentes.

Essa categoria está dividida em dois níveis: "matematizar a tecnologia enquanto fonte de temas matemáticos" e "matematizar a tecnologia modelando objetos e processos". No primeiro nível reconhece-se que há muito conhecimento matemático incorporado aos objetos tecnológicos e processos tecnológicos. Assim, o esforço do ensino deve se concentrar em desvelar a matemática que está em ação nos objetos e processos tecnológicos que usamos no nosso cotidiano. Essa matemática não é muito diferente da matemática que usualmente estudamos, mas ela é especialmente trabalhada e para permitir expressar certos modelos e tratar certas situações.

O segundo nível, segundo Frota e Borges (2004), consiste em entender que a educação matemática pode visar ao desenvolvimento da capacidade de projetar tecnologias e de adaptar a matemática disponível para resolver problemas reais e concretos, ou projetar processos que criarão novas realidades sociais.

Segundo modelo: Assude (2007)

Desenvolvido por Assude (2007) define quatro graus possíveis de integração no uso das TICs na prática de professores de Matemática: zero, baixo,

médio e forte. O grau de integração das TICs é definido por dois indicadores: modo de integração instrumental e o modo de integração praxeológica.

No modo de integração instrumental, a autora propõe que sejam observados os seguintes indicadores:

a) tipos de questões propostas pelos professores: questões matemáticas (TAM) e questões com o uso das TICs (TAC);

b) tipo de conhecimento envolvido nas atividades propostas pelos professores: conhecimentos do instrumento (IK), conhecimento matemático (IM) e relações entre esses dois conhecimentos anteriores (IK/IM).

Quanto a esse modo de integração instrumental a autora propõe a seguinte classificação:

a) iniciação instrumental: os alunos não conhecem o computador ou software e o objetivo principal do professor é ensinar sobre o uso. A relação entre conhecimento instrumental e conhecimento matemático é mínimo;

b) exploração instrumental: os alunos não conhecem as TICs ou software e são levados a explorá-lo através de questões matemáticas. O objetivo do professor é melhorar tanto o conhecimento do instrumento quanto o conhecimento matemático. O nível de relação entre o conhecimento do instrumento e o conhecimento matemático pode variar de mínimo a máximo, de acordo com a questão. Esse modo pode evoluir para uma simbiose instrumental;

c) reforço instrumental: os alunos já sabem usar o instrumento, mas se deparam com dificuldades instrumentais quando são confrontados com questões matemáticas. O objetivo do professor é melhorar o conhecimento matemático. A relação entre conhecimento matemático e conhecimento instrumental é máxima porque o conhecimento instrumental é requisitado para alcançar o conhecimento matemático;

d) simbiose instrumental: o aluno já sabe usar o instrumento e é confrontado com questões matemáticas que permitem a ele melhorar tanto o conhecimento matemático quanto o conhecimento instrumental, uma vez que eles estão conectados. A relação entre conhecimento instrumental e matemático é máxima.

O modo de integração praxeológico procura descrever o trabalho matemático dos alunos através da análise das questões técnicas, tecnologias e teorias envolvidas. Os indicadores são:

a) tipo de questões usando tecnologia (TAC);

b) tipo de questões usando lápis e papel (TAPP);

c) técnica com tecnologia (TEC);

d) técnica com lápis e papel (TEPP);

e) relação entre as questões com tecnologia e questões com lápis e papel (TAC/TAPP);

f) relação entre a técnica com tecnologia e a técnica com lápis e papel (TEC/TEPP);

g) técnica fraca (significa técnica sem justificação tecnológica ou teórica) (WTE);

h) técnica forte (significa técnica com justificação tecnológica ou teórica) (STE).

No modo de integração praxeológica foram identificados cinco modos:

a) modo vácuo: não há nenhuma questão envolvendo tecnologia (TAC) nem técnica com tecnologia (TEC) na atividade matemática dos alunos;

b) modo mínimo: há TAC e TEC, mas não há questões usando lápis e papel (TAPP) nem a utilização da técnica lápis e papel (TEPP);

c) modo justaposto: há TAC, TEC, TAPP e TEPP, mas não há relação entre esses tipos de questões ou técnicas;

d) modo entrelaçado: há TAC, TEC, TAPP, TEPP e alguma relação entre as questões e técnicas, mas todas técnicas são fracas;

e) modo máximo: há todos os tipos de questões e técnicas e forte relação entre essas questões e todas as técnicas.

A associação entre os modos instrumentais e praxeológicos com outras variáveis,como, nova ou velha dialética, papéis do contrato didático e número

de sessões, são o meio para definir o grau de integração da TIC, conforme descrição abaixo:

a) nível baixo: o grau de integração é baixo se o modo instrumental é de iniciação, o modo praxeológico é mínimo ou justaposto, não há dialética entre as novas e velhas questões e técnicas e não há mudança no contrato didático;

b) nível médio: o grau de integração é médio se o modo instrumental é de iniciação e reforço, se o modo praxeológico é justaposto ou entrelaçado, e se há algumas relações entre novas e velhas questões e alguma mudança no contrato didático;

c) nível forte: se todas as dimensões estão implementadas na sala de aula.

Terceiro modelo: Unesco (2002b)

É apresentado pela Organização das Nações Unidas para Educação, Ciência e Cultura (UNESCO, 2002b) em seu documento *Information and Comunication Technology: a curriculum for schools and programme of teacher development*. Este modelo descreve quatro amplos estágios no uso das TICs por professores. São eles:

a) descobrir: o primeiro estágio dos professores no uso das TICs é feito através da descoberta das ferramentas, suas funções gerais e seus usos. Neste estágio de descoberta das TICs como ferramenta, os professores estão somente começando a explorar as possibilidades e consequências de usar as TICs no currículo. Essa primeira fase está relacionada a uma firme prática tradicional e centrada no professor;

b) aprender como usar: seguindo o estágio de descobertas, vem o estágio de aprender como usar as TICse começar a fazer uso delas em diferentes conteúdos. Isso envolve o uso de aplicações gerais e particulares às TICs e está relacionada a uma nova compreensão da contribuição do mesmo para a aprendizagem. Os professores, nessa fase, usam as tecnologias para tarefas já conhecidas do currículo, dominando o ambiente de aprendizagem. O currículo é adaptado para aumentar o uso das TICs em várias áreas do conhecimento com ferramentas e softwares específicos;

c) compreender como e quando: esse estágio implica na habilidade para reconhecer situações onde as TICs irão ajudar escolher a ferramenta mais apropriada para uma questão particular, e usar essa ferramenta em combinação para resolver problemas reais. As TICs tornam-se parte do pensamento integral da prática profissional e produtividade pessoal diários. O foco do currículo é centrado no aprendiz e integra diferentes áreas do conhecimento em aplicações do mundo real. As TICs são incorporadas em todas as áreas.

d) especializar-se no uso: o último estágio envolve a especialização no uso das TICs, que ocorre quando alguém entra mais profundamente na ciência que cria e suporta o computador. Nesse estágio, as TICs são estudadas como um assunto. Tal estudo diz respeito à educação vocacional ou profissional, que não é uma educação geral, e é muito diferente dos estágios anteriores envolvendo as TICs.

Quarto modelo: Hall e Hord (2006)

É chamado de Levelof Use (LoU). O modelo citado foi construído a partir da identificação e verificação através das pesquisas com grupos universitários, escolas médicas e grupos de negócios, e está baseado em comportamentos que retratam como as pessoas agem a mudanças específicas, sem, contudo, focar os sentimentos ou atitudes em relação a tais inovações. Esse modelo, proposto por Hall e Hord (2006), aqui designado como Estágios no Uso, pode ter um uso formativo, ou seja, pode ser utilizado para planejar e facilitar o uso de tais inovações, uma vez que possibilita a compreensão das necessidades dos usuários (HALL; HORD, 2006). No caso específico o termo usuário será substituído pelo termo professor, o termo clientes substituído por alunos e a inovação por TICs.

A primeira distinção a ser feita pelos autores é entre usuários e não-usuários. Hall e Hord (2006) identificaram três estágios de não-usuários e cinco estágios de usuários, conforme descrição abaixo:

a) não-usuário: foram identificados três estágios bem diferentes de não-usuários, como descritos abaixo:

- estágio de uso 0 – Não – usuário: quando um professor conhece pouco ou nada sobre as TICs. Antes esse professor não mostra nenhum conhecimento ou interesse nas TICs, e nem quer agir para aprender sobre o assunto;

- estágio de uso 1 – Orientação: quando um professor age para aprender sobre as TICs ou exibe interesse em conhecer mais. Comportamentos típicos desse estágio são: leitura de material e questionamento aos colegas sobre a inovação. O comportamento do indivíduo está relacionado à aprendizagem sobre as TICs, sem, contudo, tomar uma decisão de usá-las;

- estágio de uso 2 – Preparação: nesse estágio o professor não iniciou o uso, mas há indicativos de intenção e de um momento de iniciar. O professor está preparando material e a si mesmo para o primeiro uso;

b) usuários: embora estas descrições sejam apresentadas em sequência que é lógica, nem todos os professores irão seguir necessariamente esta sequência:

- estágio de uso 3 – Uso mecânico: nesse estágio o professor está ativamente engajado com a inovação no seu local de trabalho. Esse estágio é caracterizado pela experimentação do professor, que busca dominar o computador e, por isso, o trabalho de mudança acompanha mais as necessidades do professor do que as dos alunos. Há um foco de planejamento em curto prazo. O professor está engajado no domínio das exigências para usar o computador, o que muitas vezes resulta num uso superficial;

- estágio de uso 4A – Rotina: um professor que teve tempo suficiente e ajuda adequada pode ser encontrado nesse estágio. Nesse estágio, o professor já dominou as TICse seu uso, e estabeleceu uma forma regular de trabalhar com eles. Neste estágio, o professor não está planejando fazer nenhuma adaptação ou mudança, em lugar disso, o uso está estabilizado;

- estágio de uso 4B – Refinamento: alguns professores começam a observar e admirar o quanto o uso da inovação está beneficiando seus alunos. Baseado em suas reflexões e avaliações, eles fazem adaptações nas TICs e no uso que fazem delas a fim de aumentar os benefícios de seus alunos. As principais características deste estágio são as adaptações para o benefício dos alunos;

- estágio de uso 5 – Integração: nesse estágio o professor faz adaptações para o benefício de seus alunos, mas as faz em companhia de um ou mais professores. A colaboração acontece entre professores, não entre professor e uma pessoa fonte tal como um consultor, uma biblioteca ou alguém principal. Os dois ou mais professores planejam ou realizam adaptações no uso das TICS buscando trazer maiores benefícios aos estudantes;

c) nível forte: se todas as dimensões estão implementadas na sala de aula:

- estágio de uso 6 – Renovação: o professor está explorando ou implementando alguns meios para modificar o uso das TICs de uma forma mais ampla, ou para substituí-las. As modificações podem constituir uma significante adição ou ajuste, ou múltiplas pequenas adaptações que juntas acrescentam mudanças significativas. Nesse caso, a adaptação também é realizada para beneficiar os alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As transformações provocadas pela pós-modernidade têm sido marcadas principalmente pela ciência e pela tecnologia e o diagnóstico que temos hoje aponta que nossos jovens são conscientes e influenciados diretamente pelos grandes progressos que vêm acontecendo. Portanto, como destaca D´Ambrosio (1986, p. 91) não há "outra possibilidade além de um esforço em massa, de proporções reconhecidas na história, para que a escola desempenhe seu papel único e insubstituível de preparar as crianças para que sejam instrumentos dessa mudança".

Podemos destacar que todas essas transformações provocadas na nova sociedade, acabaram criando um novo cenário que exige do professor novos conhecimentos e ações. Apesar dos avanços que tivemos e dos modelos apresentados acima, reconhecemos que muito ainda precisa ser feito para que de fato se incorporem os elementos necessários para a formação tecnológica necessária dos futuros professores de matemática.

Podemos destacar que mesmo reconhecendo que toda taxonomia (sistema de classificação) reduz a complexidade de qualquer coisa que estiver sendo categorizada, Bruce e Levin (1997) afirmam que elas são importantes para

fazer comparações, e no caso específico dos modelos apresentados revelam variações muito mais sutis que a simples classificação em usuário e não-usuário.

Outra consideração importante é a necessidade da discussão das duas abordagens possíveis para o uso das TICs em processos de ensino e aprendizagem com o computador: o construcionismo e o instrucionismo (PAPERT, 1994). Essa discussão se torna indispensável porque ela se assenta na compreensão que o professor, de qualquer nível de ensino, tem da natureza do processo de aprendizagem,seja como um processo de simples transferência de conhecimento do professor para o aluno ou como um processo de produção de conhecimento pelo estudante, estando diretamente relacionado ao que Lagrange (2003) chamou de dimensão epistemológica.

Além disso, os modelos aqui apresentados remetem ao que Almeida (2004, p.85) denomina formação contextualizada de professores para o uso pedagógico das TICs, que tem como foco "o tempo e o espaço da instituição educacional e origina-se 'na' e 'da' prática do professor". Além de outras características, a formação contextualizada pressupõe que as necessidades deformação emergem do contexto educacional, tanto as especificidades das dificuldades e potencialidades do próprio contexto (espaço físico, relações de poder, recursos e outras), quanto às características dos sujeitos envolvidos (estágios no uso do computador).

Podemos destacardos modelos aqui apresentados: Modelo I – Goos *et al.* (2003) que apresenta quatro papéis da tecnologia com relação às interações entre ensino e aprendizagem estruturadas por quatro metáforas (tecnologia como mestre; como serva; como parceira e como extensão do self) para teorizar a variação no grau de sofisticação com que os professores e alunos trabalharam com tecnologia. O Modelo II - Assude (2007) que apresenta graus possíveis de integração nos usa das TICs na prática dos professores de Matemática (zero, baixo, médio e forte). O Modelo III - Unesco (2002b) que descreve quatro estágios no uso das TICs pelos professores (descobrir; aprender como usar; compreender como e quando, e especializar-se no uso) e o Modelo IV - Hall e Hord (2006) designado Estágios no Uso, identificando três estágios de não uso e cinco estágios de usuários. Os quatro modelos aqui apresentados nos permitem refletir que não podemos pensar somente

em habilitar os formadores de professores e os futuros professores para compreender e usar o computador em suas práticas de ensino, mas também compreender como o computador pode ser integrado às novas formas de compreensão no ensino e da aprendizagem, identificando quais elementos devemos considerar nessa formação quanto ao uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Destacamos, ainda, alguns elementos que podem ser considerados nesse processo: a visão compartilhada entre todos os envolvidos na formação de professores; a possibilidade de acesso à tecnologia; assistência técnica; avaliação constante sobre a eficiência das TICs na aprendizagem; políticas e comunidades de suporte; ensino centrado no aluno; professores habilitados para o uso das TICs para a aprendizagem, conhecedores do conteúdo, das metodologias e das TICs; fornecer o acesso permanente ao desenvolvimento profissional, considerando-o como um processo contínuo,porque a tecnologia muda constantemente, ou seja, os pontos apresentados no documento *National Educational Technology Standards for Teachers*.

Para concluirmos, destacamos que cabe ao professor uma grande parcela na responsabilidade de educar, de formar essa nova geração de jovens não só para estarem preparados para lidar com as mudanças tecnológicas, mas sem perderem os valores humanos, para que estesjovens possam atuar como cidadãos críticos e reflexivos, e ocupem os seus espaços sociais com dignidade, exercendo o seu direito à cidadania.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. E. B. de. **Inclusão digital do professor:** formação e prática pedagógica. São Paulo: Editora Articulação, 2004.

ARTIGUE, M. Ferramenta Informática, Ensino de Matemática e Formação dos Professores. **Emaberto**, Brasília, v. 14, n. 62, p. 9-22, abr./jun. 1994.

ASSUDE, T. **Teacher's practices and degree of ICT integration. In: Europe an Research in Mathematics Education**, 5, Larnaca. 2007. Disponível em: <http:ermeweb.free.fr/CERME5b/>. Acesso em: 03/1/2009.

BACCON, Ana Lúcia Pereira. **O professor como um lugar**: um modelo para análise da regência de classe. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências e educação matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 164p., 2005.

BACCON, Ana Lúcia Pereira. **Um ensino para chamar de seu:** uma questão de estilo. Londrina, 2011. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e educação matemática) – Universidade Estadual de Londrina. 169 p., 2011.

BRASIL, Lei 9394/96. **Lei de Diretrizes e Bases Nacionais**. Brasília: MEC, 1996.

BRUCE, B. C.; LEVIN, J. A. Educacional Technology: Media for Inquiry, Communication, Construction, and Expression. **Journal of Educational Computing Research,** v. 17, n. 1, 1997. p. 79 – 102.

D´AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre a Educação e Matemática.** São Paulo: Summus; Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

FROTA, M. C. R; BORGES, O. Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na educação matemática. In: Grupo de Trabalho 19 da Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 27, 2004, Caxambu. **Anais...** Disponível em: <http://paje.fe.usp.br/~anped/>. Acesso em: 19/06/2008.

GOOS, M. *et al.*Perspectivesontechnology mediated learning in secondary school mathematics classrooms. **Journal of Mathematical Behavior**. n. 22. 2003. p. 73 – 89. Disponível em: <www.elsevier.com/locate/jmathb>. Acessoem: 08/08/2007.

HALL, G. E.; HORD, S. M. **Implementing Change:** patterns, principlesandpotholes. 2. ed. Boston: Pearson Education, 2006. 304 p.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. São Paulo: Papirus, 2007.

LAGRANGE, J. B. Analysing the impact of ICT on Mathematics teaching practice. **CERME 3**. Reims, 2003. Disponível em: <http://www.dm.unipi.

it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG9/TG9_list.html> Acesso em: 16/01/2009.

PAPERT, S. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994. 210 p.

PIMENTA, S. G. (Org.). **Saberes pedagógicos e atividade docente**. São Paulo: Cortez, 1999.

SCHÖN, D. A. **La formación de profesionales reflexivos**. Madrid: Paidos, 1992.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

UNESCO – **United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. Information and Communication Technologies in Teacher Education: a planningguide.** Paris. 2002 (a). Disponível em: < http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001295/129533e.pdf>. Acesso em: 05/12/2007.

______. **Information and Communication Technology:** a curriculum for schools and programme of teacher development. Paris. 2002 (b). Disponível em: < http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001295/129538e.pdf >. Acesso em: 28/11/2007.

ZEICHNER, K. Reflections of a teacher educator working for social change. In: Korthagen, F. and Russel, T. (Eds.). **Teachers who teach**: reflections on teacher education. Londres: Falmer Press, 1995, p. 11-24.

CAPÍTULO 13

O DESENVOLVIMENTO DO LETRAMENTO ESTATÍSTICO A PARTIR DO USO DO GEOGEBRA: UM ESTUDO COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA[1]

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho
Saddo Ag Almouloud
Maria José Ferreira da Silva

INTRODUÇÃO

Os conteúdos relativos à estatística descritiva, introduzidos no currículo da Escola Básica desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998, 2000), e os resultados de pesquisas mais atuais, convergem para a necessidade de se trabalhar simultaneamente a formação de professores (continuada e inicial) e a construção de conhecimentos pelos alunos. Gatusso (2006) aponta que as concepções de professores de matemática sobre a estatística e seu ensino têm de merecer um maior interesse por parte dos responsáveis pela formaçãode professores de matemática sob pena de que, mais tarde, quando estiverem trabalhando estes conteúdos em sala de aula, eles sejam desvalorizados. Destaca-se o papel fundamental do professor no desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos pelas opções didáticas que realiza, pela mediação dos debates em aula, pelas trocas entre pares na resolução de problemas, entre outras situações, conforme assinala Carvalho (2003). A utilização de conceitos estatísticos no dia a dia pessoal e profissional

[1] Este texto foi publicado na revista REVEMAT, v.7, n.2, 2012, e recebeu autorização para publicação neste livro.

das pessoas subentende um nível de letramento[2] minimamente funcional e, em alguns casos, de alfabetização científica, enquanto pesquisas mostram que o ensino tem focado em um nível mais básico, chamado de cultural.

Pesquisas recentes desenvolvidas pelo grupo de pesquisa PEA-MAT, no contexto do projeto Processo de Ensino e Aprendizagem Envolvendo Raciocínio Estatístico e Probabilístico (PEA-ESTAT)[3], que dialogaram com pesquisas nacionais e internacionais na área de Educação Estatística, comprovam o pouco ou nenhum conforto do professor para o trabalho com conteúdos dessa área de conhecimento. Dessa forma, resta a ele a concordância com o apresentado pelos livros didáticos e/ou materiais apostilados fornecidos por redes de ensino que, em sua maioria, centram as atividades em cálculos matemáticos e em leitura de gráficos (entenda-se aqui "leitura dos eixos"). Identificou-se, nessas pesquisas, pouca exploração dos conceitos abordados, tal como indicam os resultados de Friolani (2007), Cardoso (2007), Bigattão (2007) e Silva (2007). Esta última autora salienta ainda a não capacidade para a percepção da variação na análise de um conjunto de dados, percepção essa que acreditamos ser a espinha dorsal da construção do raciocínio estatístico a partir de uma proposta de adaptação dos níveis propostos por Garfield (2002) para o contexto da apreensão de variabilidade.

Vale destacar que no cenário internacional aparecem trabalhos que se tornaram quadro teórico para a pesquisa em educação estatística, particularmente, por sua importância na pesquisa ora apresentada: reflexões sobre o pensamento estatístico (WILD; PFANNKUCH, 1999), o letramento estatístico (GAL, 2002) e raciocínio estatístico (GARFIELD, 2002). Tudo isso desenvolvido de forma a potencializar o desenvolvimento de habilidades para a análise exploratória de dados (BATANERO;ESTEPA; GODINO, 1991).

CONTEXTUALIZAÇÃO

O presente texto discute uma parte dos resultados do projeto de pesquisa PEA-ESTAT, particularmente, a utilização de ambiente computacional como

[2] Os níveis de letramento estatístico que consideramos nessa pesquisa foram propostos por Shamos (1995).

[3] Desenvolvido de 2008 a 2010, sendo que contou com financiamento da FAPESP no último biênio.

ferramenta didática para o desenvolvimento do letramento estatístico com professores de Matemática do terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental ou do ensino médio. Utilizou-se, nessa fase do projeto, o programa Geogebra para a construção de gráficos estatísticos com características dinâmicas. Ele permite o trabalho com a escala dos eixos, a construção de mais de um gráfico no mesmo sistema de eixos, além da complementação dos gráficos com outras informações relevantes sobre as medidas-resumo do conjunto de dados em análise.

O objetivo de escolher o Geogebra foi discutir com estes professores as potencialidades de um ambiente dinâmico para a análise de gráficos estatísticos a partir da percepção da variação dos dados, já que a possibilidade de analisar simultaneamente mais de um gráfico, representando um mesmo banco de dados, potencializaria a percepção da variação dos dados, segundo resultados observados em Vieira (2008).

Dessa forma, reforçou-se a opção pela utilização da filosofia da Análise Exploratória de Dados como pano de fundo para o desenvolvimento do letramento estatístico. De acordo com Coutinho (2008)

> Embora os professores, em suas declarações, pareçam concordar com a filosofia da Análise Exploratória de Dados, em suas práticas eles se restringem a um enfoque mais tecnicista, centrado no uso de algoritmos. [...] Do fato de termos escolhido esta filosofia como quadro teórico para o desenvolvimento dos trabalhos, o ponto mais importante não são os cálculos e construções, mas sim a análise dos dados pelo uso de representações múltiplas: tabelas, gráficos e medidas. O esforço deve ser concentrado para que os professores possam evoluir para o nível científico de letramento estatístico, de forma a que tenham autonomia na criação de situações de aprendizagem eficientes para o letramento de seus alunos dos diferentes níveis de escolaridade. (p. 5).

Parte-se da hipótese de que o uso de ambiente computacional pode potencializar o desenvolvimento do pensamento estatístico, a partir da mobilização de mais de um registro de representação semiótica nos termos estudados por Coutinho, Silva e Almouloud (2011). Estes autores articulam a noção de transnumeração, proposta por Wild e Pfannkuch (1999) e Pfannkuch (2008), com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval (2003).

Segundo Wild e Pfannkuch (1999),

> A transnumeração perpassa todas as análises estatísticas de dados, ocorrendo cada vez que é mudada a maneira de observar os dados, com a esperança que isto conduza a um novo significado. É possível olhar mediante muitas representações gráficas para encontrar algumas realmente informativas. [...] ao final do processo, a transnumeração atua outra vez, quando descobertas representações de dados que ajudam a conduzir novas compreensões relativas ao sistema real de outras representações. (p. 5, tradução nossa).

No que se refere à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, em uma leitura feita para sua aplicação na aprendizagem de conteúdos estatísticos, Vieira (2008) afirma que:

> [...] A resolução de problemas estatísticos passa não apenas pela transformação de um registro a outro, mas também pelo uso simultâneo desses diversos registros para obtenção do maior número de informações, permitindo a análise crítica dos dados, segundo os princípios da Análise Exploratória de Dados. (p.24).

Esta ideia é reforçada por Duval (2009) quando afirma que um registro de representação semiótica deve permitir o cumprimento de três atividades cognitivas:

- a construção de um traço ou ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como elemento de um sistema determinado (entendemos assim os gráficos estatísticos, as tabelas de distribuição e de distribuição de frequências e as medidas resumo como registros de representação semiótica);
- a transformação de uma representação em outra a partir das regras do sistema considerado (transformação de tabelas pela modificação do tipo de agrupamento dos dados, transformação dos gráficos pela modificação das escalas dos eixos, etc.);
- a conversão das representações produzidas em um sistema para representações de um outro sistema (conversão de tabelas em gráficos, tabelas em medidas, gráficos em medidas, e viceeversa).

O trabalho realizado partiu da necessidade percebida em resultados de pesquisas, de que os professores, em formação inicial e continuada, precisam ter acesso a novas estratégias de ensino e abordagens diferenciadas

dos conceitos de base dessa área do saber, a fim de ampliar seu leque de conhecimentos, pois somente assim poderão ter opção sustentada para mudar a prática docente. Com isso, as escolhas foram feitas de forma a construir situações de aprendizagem que favoreçam a utilização simultânea de mais de um registro de representação semiótica.

No que se refere à percepção da variabilidade em um conjunto de dados, há que se concordar com Cooper e Shore (2010) que sugerem:

> [...] mais do que se introduzir métodos que quantificam variabilidade, os estudantes necessitam vivenciar experiências nas quais simplesmente comparam a variabilidade de conjuntos de dados com o propósito de desenvolver a compreensão e os insights do que variabilidade significa para diferentes tipos de dados. Comparações visuais da magnitude da variabilidade encoraja a discussão sobre o que faz um conjunto de dados mais ou menos variável, o que necessita a discussão sobre como a variabilidade se manifesta em um gráfico particular. (p.2, tradução nossa).

No que diz respeito à compreensão da variabilidade por professores, Sánchez, Silva e Coutinho (2011) apontam para a necessidade de pesquisas mais aprofundadas na área. Nesse contexto, se configura a questão da pesquisa aqui relatada: Qual apercepção da variabilidade de professores quando utilizam ambiente computacional para o trabalho com gráficos estatísticos com alunos do ensino fundamental II, a partir da articulação das noções de transnumeração e de registros de representação semiótica?

METODOLOGIA E ESTRATÉGIAS DE ATUAÇÃO

Serão discutidos neste tópico os seguintes pontos: a metodologia empregada e os procedimentos metodológicos (organização da equipe de pesquisa, estudos diagnósticos e coleta de dados, procedimentos empregados na formação dos professores).

O projeto partiu de uma proposta de pesquisa-ação, uma vez que o objetivo era ajudar os professores a determinar as condições de seu próprio trabalho e organizarem-se em comunidades de pesquisadores, dedicados a experiências emancipatórias para eles mesmos e para seus alunos, nos termos definidos por Kincheloe (1997).

Participaram da pesquisa cinco professores de matemática das séries finais do ensino fundamental e do ensino médiointeressados pelos problemas do ensino e de aprendizagem da estatística e que participavam do grupo de pesquisa como colaboradores. Destes, três haviam concluído o mestrado no Programa de Estudos Pós-graduados em educação matemática da PUC-SP.

Os encontros eram gravados e ocorriam todas as quintas-feiras, das 14h às 17h, em um dos laboratórios de informática da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias da PUC-SP. Além disso, periodicamente, os participantes redigiam um breve relato sobre seu desenvolvimento profissional e sobre a construção dos conhecimentos estatísticos em jogo. Dessa forma, foi composto o banco de dados relativo a esta fase da pesquisa. Ressalta-se que esta foi a última fase desenvolvida e ocorreu após um ano de formação específica sobre conteúdos estatísticos (identificados a partir de questionário respondido pelos participantes). Um ano de trabalho coletivo no preparo de situações de aprendizagem sem uso de ambiente computacional. Estas situações foram levadas para sala de aula por um dos participantes, contando com a observação dos demais e discussões no grupo a cada sessão com os alunos (alunos de 6º ano do ensino fundamental de uma escola da rede municipal de ensino, na cidade de São Paulo). Este professor voluntário para a aplicação das atividades não possuía mestrado, mas participava do grupo de pesquisa PEA-MAT e das formações continuadas oferecidas por esse grupo há dez anos.

A proposta de trabalho para essa última fase era a criação de um tutorial para construção de gráficos estatísticos com uso do programa Geogebra, sendo que este tutorial deveria ter linguagem acessível para qualquer professor que ensina matemática na escolabásica. Os comandos deveriam manter o aspecto dinâmico da construção nesse ambiente e também permitir a construção de mais de um gráfico no mesmo sistema de eixos, potencializando a comparabilidade para análise da variação dos dados.

Nenhum dos participantes conhecia essa funcionalidade do Geogebra, o que tornou a tarefa um desafio para todos e fortaleceu o aspecto colaborativo do grupo. Os participantes utilizavam o ambiente Moodle para comunicação fora das reuniões presenciais, além do fórum do Geogebra, o que permitia troca com pesquisadores de diversos países de língua portuguesa. Foram também

trabalhados textos que traziam reflexões teóricas e resultados recentes de pesquisas a respeito do uso de ambiente computacional e leituras de gráficos estatísticos.

O CONTEXTO DA PESQUISA NA FASE DO USO DO GEOGEBRA

Segundo Valente (1993) a mudança da função do computador como meio educacional acontece juntamente com um questionamento da função da escola e do papel do professor. A verdadeira função desse aparato educacional não deve ser mais a de ensinar, mas sim a de criar condições de aprendizagem. Assim, o professor passa a ser o criador de ambientes de aprendizagem e o facilitador do processo de desenvolvimento intelectual do aluno. Tal observação reflete exatamente os objetivos da escolha feita neste estudo pela introdução de ambiente computacional na formação pretendida: uso de ambiente dinâmico que favorecesse a apreensão da variabilidade pelo uso simultâneo de mais de um registro de representação semiótica com mobilização da transnumeração, conforme apresentado anteriormente no texto.

Segundo Valente (1993), se o objetivo principal do processo educativo é oportunizar o desenvolvimento da construção do conhecimento, com o aprendiz no centro do processo educativo compreendendo conceitos e reconhecendo a sua aplicabilidade em situações por ele vivenciadas, deve-se defender a utilização do computador como ferramenta, facilitando a descrição, reflexão e depuração de ideias.

Nesse âmbito, a análise das potencialidades do uso da informática, mais especificamente do Geogebra no ensino e aprendizagem da Estatística, e o fato de que um professor deve ter uma vivência expressiva com programas computacionais educacionais, antes de utilizá-los em sala de aula, justifica as escolhas feitas no momento do planejamento do projeto. Nestas condições, a formação de professores construída deveria abranger, também, conhecimentos de informática dos principais programas educacionais disponíveis e, ainda, discutir aspectos didáticos ligados ao uso dos mesmos em sala de aula. O professor deve saber que o computador e os programas educativos são ferramentas de trabalho, cujo uso precisa de uma estratégia didático pedagógica.

É o professor quem deve definir essa estratégia em função dos objetivos do ensino e das ferramentas de que dispõe.

Um aspecto importante nessa fase do projeto foi o estudo das funcionalidades do Geogebra para construção de gráficos estatísticos que tornou-se o foco principal das discussões ao longo dos encontros. Tais discussões eram sempre fundamentadas pela leitura de textos que tratavam do uso de ambientes computacionais, ou tratavam da compreensão e leitura de gráficos estatísticos.

O Geogebra é um programa de matemática dinâmica para ser utilizado nas escolas do ensino fundamental, médio e superior, que reúne geometria, álgebra, cálculo e estatística. Ele permite construir diversos gráficos estatísticos por meio de comandos diretos (disponíveis na caixa de comandos) ou construídos na linha de comandos.

O uso desse programa teve por objetivo, entre outros, responder uma das questões de pesquisa do projeto PEA-ESTAT: "Que contribuições para a formação dos conceitos relacionados ao Tratamento da Informação podem ser identificadas com o uso de ambiente informatizado?". Para respondê-la, pelo menos parcialmente, parte-se das seguintes indagações: Quais as orientações para os alunos? Quais conhecimentos devem ser trabalhados e/ou mobilizados e qual o nível de escolaridade? Quantas sessões devem ser desenvolvidas com uso do programa Geogebra para que este não se torne um distrator[4] na construção dos conceitos visados?

Com o objetivo de elaborar um tutorial para a construção de gráficos estatísticos com o Geogebra foi utilizado um enfoque experimental, valorizando o envolvimento dos professores participantes que deveriam construir seus conhecimentos específicos e didáticos para o trabalho com seus próprios alunos. Para isso, eles deveriam se envolver na construção do questionamento, no instrumento para coleta dos dados, na coleta efetiva dos dados e em sua representação gráfica.

No primeiro semestre de 2010 os encontros presenciais do grupo ocorreram nos dias 4, 11, 18, 25 de março; 8, 15, 22 e 29 de abril; 6, 13 20 e 27 de maio;

[4] Entendemos como elemento distrator aquele que faz com que o aluno mude o foco de atenção, dando à ferramenta um status de objeto de aprendizagem.

10, 17 e 24 de junho; e 1 de julho. Encontros estes que foram utilizados para a familiarização com o software Geogebra e a preparação do tutorial (menos os dois primeiros, que foram usados para discutir e organizar os objetivos e metas a serem atingidas no semestre). Um dos encontros foi utilizado para discutir as limitações do Geogebra a partir da leitura e discussão de artigo científico sobre leituras de gráficos (BATANERO *et al*. 2009), e sobre o uso das diversas representações semióticas, bem como transnumeração, criando o desafio de buscar no Geogebra os recursos necessários para o bom desenvolvimento do pensamento estatístico. Buscou-se aprofundar o estudo já iniciado em Vieira (2008), ao assumir que, em estatística, a apreensão perceptiva de um gráfico permite identificar o que o gráfico representa e cada um de seus elementos. Além disso, os Níveis de Compreensão Gráfica, propostos por Friel, Curcio e Bright (2001), foram usados para analisar a compreensão gráfica mobilizada pelos sujeitos em situação de resolução de problemas propostos em contextos estatísticos.

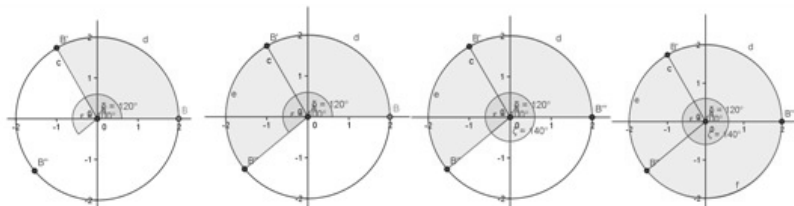
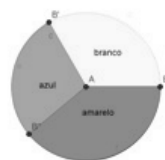
Durante todo processo, a cada gráfico, a partir do qual se chegava a um conjunto de procedimentos que preservasse o aspecto dinâmico da construção[5], o grupo discutia a abordagem didática: "em que o programa computacional contribui para a construção do pensamento estatístico? Como potencializar a percepção da variabilidade pelo uso do aspecto dinâmico? Quais os possíveis entraves?".

Diante de tais questionamentos, direcionamos a reflexão para o contexto que considerava o conhecimento dos alunos que participariam das atividades nos termos de Ball, Thames e Phelps (2008): conhecimento sobre os alunos, articulado com o conhecimento matemático do professor. A partir das contribuições do professor que iria aplicar as atividades elaboradas em sala de aula foi possível não apenas discutir as linguagens e o roteiro do tutorial a ser construído, como também o tipo de tarefa a ser proposta para os alunos. Um exemplo dessa reflexão: o diagrama de setores, segundo testemunho do professor, provocaria um desvio da atenção dos alunos, dos aspectos relativos à análise dos dados representados para os aspectos técnicos da construção com

[5] Buscava-se que a qualquer alteração na planilha de dados, o gráfico se atualizasse automaticamente, e viceeversa.

o Geogebra, ou seja, estes aspectos técnicos se constituiriam em distratores para a aprendizagem visada. A Figura 1 ilustra uma das formas de construção desse gráfico no Geogebra e as marcações no gráfico indicam a complexidade cognitiva de sua construção, a construção de cada um dos setores em setores circulares consecutivos e interdependentes, de forma a manter o aspecto dinâmico.

A partir deste testemunho, e das discussões desencadeadas por ele, tomou-se a decisão de que tal gráfico seria construído pelo professor e apresentado ao aluno, de forma que este pudesse perceber as consequências das mudanças no banco de dados analisado e da comparação com os demais gráficos trabalhados simultaneamente. Por outro lado, o gráfico de setores poderia ser facilmente construído e analisado pelos próprios alunos de 6º ano do ensino fundamental, com utilização de ferramentas não computacionais ou mesmo de planilhas eletrônicas, como o *Calc* ou *Excel*.

Figura 1 -Tela construída pelos professores para Diagrama de setores no Geogebra

Fonte: os autores deste capítulo.

RESULTADOS OBSERVADOS

Embora a construção do gráfico de setores no *Geogebra* tenha sido identificada como portadora de grandes dificuldades cognitivas, (as dificuldades cognitivas não estariam no sujeito) constatou-se que outros gráficos estatísticos tinham construção e manipulação bastante simples. Foi citado

aqui a construção do gráfico de colunas e do *box-plot* no mesmo sistema de eixos, conforme o tutorial construído pelos professores.

O tutorial fornecido no site do *Geogebra* apresenta um conjunto de procedimentos para construção do gráfico de colunas e para a construção do *box-plot* sem, no entanto, tratar da construção de ambos no mesmo sistema de eixos para potencializar a comparabilidade. Dessa forma, a decisão pela construção de um novo tutorial mais adequado aos objetivos de aprendizagem pretendidos – entre eles, a apreensão da variabilidade em um conjunto de dados – foi unânime no grupo. Nesse processo de construção, optou-se por um conjunto de procedimentos para construção dos gráficos que utilizasse a localização das células no banco de dados como elemento do comando a ser digitado, ao invés de utilizar o valor assumido nessas células. Tal opção justifica-se pela possibilidade de alterar o banco de dados, produzindo a consequente atualização no gráfico construído. Para os professores participantes, essa variável didática mostrou-se fundamental na construção de um cenário próprio à discussão da variabilidade, tal como proposto por Cooper e Shore (2010). As Figuras 2 e 3 ilustram um exemplo de alteração a partir da modificação de valores no banco de dados.

A utilização do *Geogebra* permitiu a alteração do banco de dados para que, sem a necessidade de nova digitação do comando, fosse modificado automaticamente o gráfico produzido. Na gestão do tempo didático, tal possibilidade é fundamental para a exploração das diversas formas que uma distribuição de dados pode assumir, ressaltando a concentração de dados ou a presença de dados discrepantes.

Os dois exemplos referem-se a dados sobre o número de páginas de jornais feitos em escolas. A partir da construção do primeiro gráfico, pelo comando DiagramaDeBarras[A2:A41, 0.5], onde A2:A41 é o intervalo de células considerado e 0.5 é a largura de cada uma das colunas, pôde-se obter, também, o segundo gráfico, conforme ilustrado na sequência.

Nas discussões com o grupo de participantes, todos ressaltaram que tal procedimento na gestão da atividade não seria possível sem o uso de ambiente computacional. Destacaram que os livros didáticos que costumavam utilizar não propiciavam esse tipo de discussão.

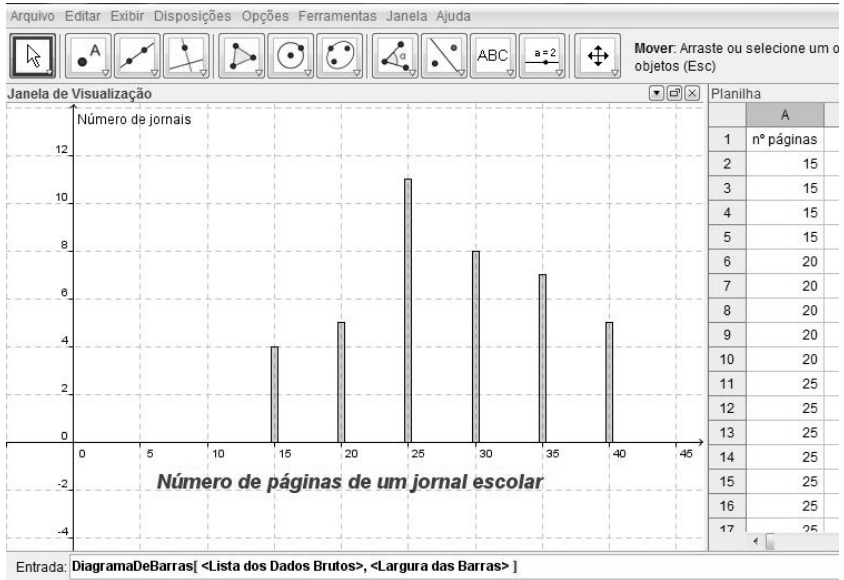
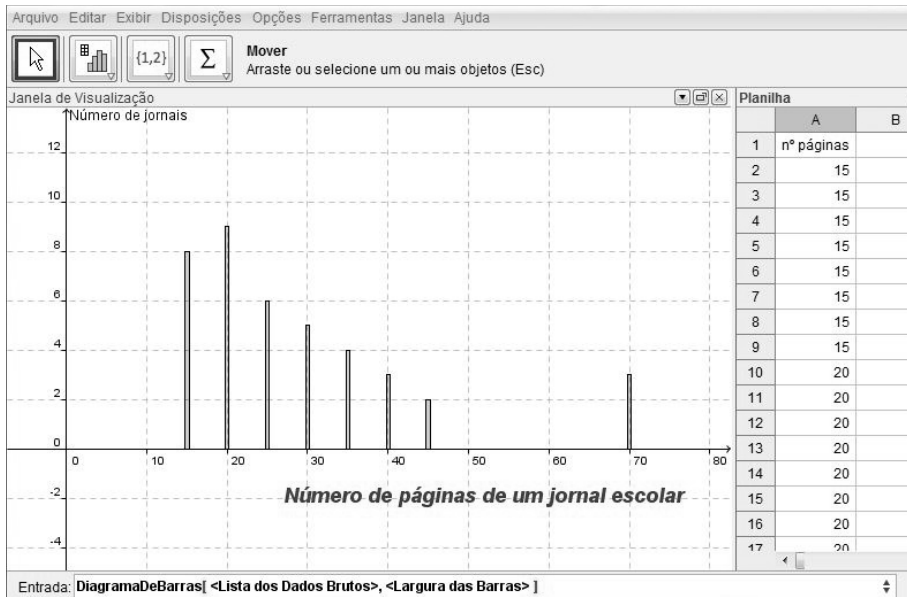
Figura 2 -Primeira versão do gráfico de colunas construído para as células A2 a A41

Fonte: os autores deste texto.

Figura 3 -Segunda versão do gráfico de colunas construído para as células A2 a A41

Fonte: os autores deste texto.

Os professores trabalhavam organizados em pequenos grupos e cada vez que um desses grupos pensasse ter concluído a redação das instruções, todo o grupo de participantes validava os procedimentos ou dava novas sugestões a serem discutidas e validadas.

Apresentamos, na Figura 4, os procedimentos redigidos pelos professores para a construção do gráfico de colunas e para a construção do gráfico de caixa (*box-plot*), conforme material utilizado em oficinas ministradas posteriormente pelo grupo em eventos de educação matemática (III SHIAM, 1º Seminário Internacional de educação matemática Secretaria Municipal de Educação da Cidade do Rio de Janeiro, Um dia de Reflexão – Pepgeducação matemática da PUC-SP).

Figura 4 -Procedimentos redigidos pelos professores

Construção do Gráfico de Colunas

Na parte inferior da tela, no campo designado por "Entrada", digitamos o comando GráficoDeBarras[A2:A27, 0.5], sendo que [A2:A27] é a lista com os valores da variável e 0.5 é a largura da cada coluna.

Obs.: É importante obedecer a grafia e a sintaxe a ser utilizada, pois o *Geogebra* não aceita outro tipo de comando.

Ao dar o comando <Enter> o gráfico é construído e aparece na janela algébrica o ícone a = 13. Ele é o rótulo do objeto "Gráfico de Barras" construído. Ao clicar nele com o lado direito do mouse pode-se optar por escondê-lo. É importante também saber que é possível alterar a escala nos eixos.

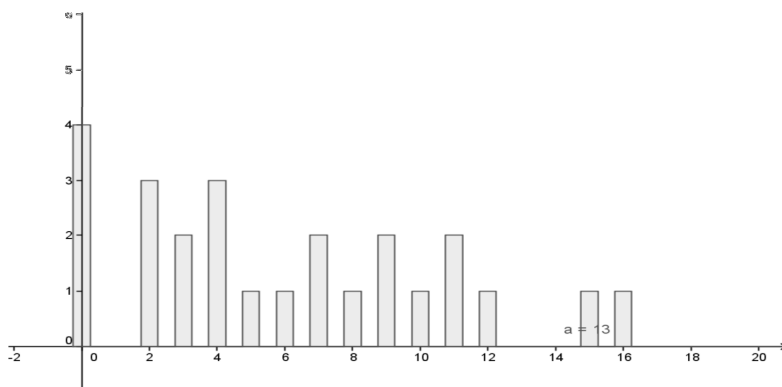
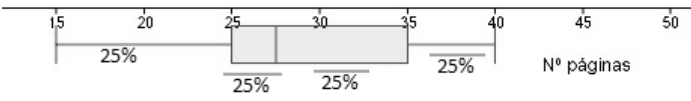



Figura 5 =Procedimentos redigidos pelos professores

Construção do Box-plot ou Gráfico de Caixa

Neste exemplo, a escolha foi construir o gráfico de caixa na direção da reta y = -1, e com 1 unidade de largura, o que significa que é preciso digitar 0.5 na linha de comando.

Na linha de entrada, situada abaixo da tela, digitar:

Neste comando, A2 e A41 delimitam o intervalo de células que contêm os dados ordenados, -1 a direção da reta y = -1 sobre a qual será construído o gráfico, e 0.5 a metade da largura escolhida para a caixa (a escolha é arbitrária). Para a direção do gráfico de caixa, pode-se fornecer qualquer ponto do eixo vertical que pareça adequado, podendo-se também construir vários desses gráficos no mesmo sistema de eixos para facilitar a comparação. Por exemplo, pode-se construir um gráfico de caixa para cada classe que se tenha, contendo as notas dos alunos e, então, fazer a comparação entre as classes.

Observando o gráfico de caixas "mais de perto": repare que as linhas que unem a caixa aos extremos marcam a distância entre o valor mínimo observado e o primeiro quartil (Q1) e entre o valor máximo observado e o terceiro quartil (Q3). A linha no interior da caixa marca o valor da mediana, que é também o segundo quartil (Q2). A figura, dessa forma, está dividida em quatro regiões, que representam os quatro conjuntos nos quais o conjunto original foi dividido, ou seja, quatro regiões com o mesmo número de elementos.

Nessas condições, o que se observa nesse gráfico é a densidade de cada subconjunto e não o número de elementos: quanto menor o comprimento relacionado à parte observada, maior é a concentração dos dados em seu interior.

Fonte: tutorial construído pelos sujeitos da pesquisa.

A representação do gráfico de colunas pelo *Geogebra* provocou, em princípio, algumas dúvidas quanto à possibilidade de uso com alunos. Os professores discutiram o significado dos elementos que acompanham a construção do gráfico na janela algébrica, assim como o posicionamento das colunas no sistema de eixos, quando se solicita larguras maiores para elas. Como pode ser observado na Figura 5, os professores perceberam a necessidade de se

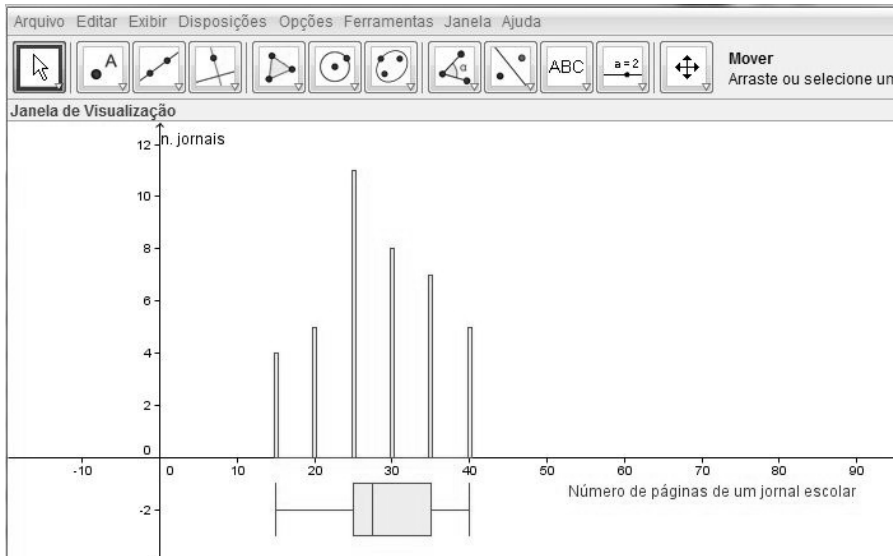
fazer escolhas didáticas adequadas para o primeiro contato dos alunos com a construção, ou, talvez, a possibilidade, de em um primeiro momento, o gráfico ser fornecido já construído, apenas para que os alunos manipulem o banco de dados e observem os efeitos na forma do gráfico. Assim, apreendendo o significado de variabilidade.

Apesar do fato de nunca terem trabalhado em sala de aula com esse tipo de gráfico, a discussão para a inclusão no tutorial a ser construído foi bastante rica, uma vez que todos concordavam com a possibilidade de seu uso, graças a pouca complexidade cognitiva presente em sua construção e interpretação. Os resultados observados por Garcia (2008) e por Canossa (2008) incentivavam tais reflexões: *"se os alunos observados pela Fernanda (Garcia) puderam não apenas construir, mas explicar aos colegas os significados do que construíram, então é possível trabalhar com esse gráfico"*. Quanto aos resultados observados por Canossa (2008), os comentários eram: *"O professor resiste, pois não conhece o gráfico. Reparem que quando ele viu do que se tratava, quando o Canossa explicou, ele aceitou, mas ainda ficou resistente..."* Tal comentáriorefere-se ao fato do professor colaborador que participou das atividades propostas por esse autor, mesmo após trabalhar com o gráfico com uso do *software Fathom*, ter preferido utilizar com seus alunos apenas o gráfico de colunas. Já os alunos observados por Garcia (2008), que eram de uma turma de 6º ano do ensino fundamental, construíram o significado para as informações obtidas pela leitura do gráfico *Box-plot*, sem a necessidade de intervenções da professora, apenas as informações contidas nas instruções para construção foram suficientes para a compreensão da concentração dos pontos em cada intervalo representado.

A análise dos procedimentos e comentários tecidos pelos professores reforça a importância da visualização de gráficos, pois ela permite aprofundar a descrição da variação dos dados (apreensão perceptiva) e, dessa forma, passar da simples leitura dos eixos (leitura dos dados) para leitura além dos dados, nos termos de Friel, Curcio e Bright (2001). Além disso, ela auxilia na mobilização do conhecimento sobre distribuição de dados, simetria eamplitude, que permitem ao sujeito a apreensão da variabilidade. Tal mobilização também é favorecida pela apreensão dos quartos (conjuntos definidos pelos quartis, ilustrados no *box-plot*). A construção no mesmo sistema de eixos permite que,

ao se modificar o banco de dados na planilha, ambos os gráficos se atualizem automaticamente. A modificação da escala nos eixos também atualiza automaticamente os dois gráficos. Estes dois aspectos servem como entraves para a simples leitura de eixos, obrigando o aluno a avançar no nível de leitura de gráficos nos termos de Friel, Curcio e Bright (2001), e, por consequência, no nível de letramento estatístico nos termos de Shamos (1995).

Este avanço pode ser justificado pela apreensão operatória da figura constituída pelo conjunto de gráficos apresentados (no caso, gráfico de colunas e *box-plot*, construídos pelo *Geogebra* em um mesmo sistema de eixos), tal como proposto por Vieira (2008) e ilustrado na Figura 6.

Figura 6 - Gráfico de colunas e Box-plot construídos no mesmo sistema de eixos do Geogebra

Fonte: os autores deste texto.

Alguns aspectos que indicam similaridades entre a ideia de transnumeração e a de conversão de registros de representação semiótica foram discutidos em Coutinho, Silva e Almouloud (2011) e identificados na análise dos encontros com os professores participantes, no que se refere à construção de seus conhecimentos específicos e didáticos: as discussões envolviam a mobilização dos conhecimentos estatísticos para a redação das orientações para construção

dos gráficos, mas também o conhecimento didático, pois a cada conjunto de instruções redigido, a discussão se voltava para o aluno.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Foi destacado o papel fundamental do professor no desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos, nas opções didáticas que realiza, na mediação dos debates em aula, nas trocas entre pares na resolução de problemas, entre outras situações, conforme assinala Carvalho (2003).

Um dos fundamentos teóricos da pesquisa foi o nível de letramento estatístico, nos termos definidos por Shamos (1995) e apresentados em Gal (2002). A utilização de conceitos estatísticos no dia a dia pessoal e profissional das pessoas subentende um nível de letramento minimamente funcional e, em alguns casos, letramento científico, enquanto as pesquisas mostram que o ensino tem focado em um nível mais básico, chamado cultural.

Uma dificuldade didática do professor, como pode ser observado nos diferentes depoimentos dos participantes do presente projeto, é criar uma apresentação adequada do tema em estudo, que possibilite ao aluno desempenhar um papel ativo na aprendizagem, isto é, o de desenvolver um trabalho autônomo. O trabalho do professor é complexo, pois além de fazer funcionar o cenário construído para essa aprendizagem, ele precisa mobilizar não apenas seus conhecimentos específicos, mas também os didáticos, conhecimentos sobre os alunos e sobre o contexto, nos termos de Ball, Thames e Phelps (2008).

Avaliando os resultados observados nesse projeto, no que tange a formação de professor, pôde-se constatar que uma parte dos objetivos propostos no projeto PEA-ESTAT foram alcançados, particularmente no que se refere ao uso de ambiente computacional para desenvolvimento do letramento estatístico, pois existem indícios de que o trabalho realizado contribuiu para:

- a formação de professores, quanto ao conhecimento de conceitos estatísticos e metodológicos que são utilizados para a construção de tal conhecimento e o conhecimento didático do conteúdo;
- a construção de uma predisposição para explorar situações-problema, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer induções, pensar de maneira lógica;

- o aumento da confiança pessoal em desenvolver atividades cujo objetivo é a construção de conhecimentos/saberes estatísticos e em usar diferentes procedimentos para resolver problemas.

Nesse aspecto, a análise global do projeto permite destacar o papel fundamental do grupo colaborativo no desenvolvimento profissional dos professores participantes, não apenas os professores em formação, mas também os professores que participaram como colaboradores e pesquisadores. Criou-se, assim, um grupo colaborativo agindo sobre o ensino e a aprendizagem de conteúdos da estatística, buscando interferir e interferindo efetivamente nas comunidades de prática dos professores de matemática de suas respectivas escolas. Ressaltou-se, durante todo o tempo do projeto, que o tempo de desenvolvimento não pode ser limitado a um curto período de intervenção e assessoramento desses professores, o processo é longo e contínuo. Foi possível observar que o tempo de participação no projeto não foi suficiente para a construção da efetiva autonomia dos participantes. A troca de experiências e conhecimentos específicos sobre suas escolas, sobre seus alunos, sobre os contextos de trabalho se mostraram e se mostram fundamentais para a construção e desenvolvimento conceitual (conhecimentos nos termos anunciados por Ball, Thames e Phelps (2008)).

Apesar do final do projeto, em termos de financiamento Fapesp, o conjunto de dados é tão denso que ainda estão em análise para organização do livro proposto no projeto inicial. Por esta razão, a pretensão é avançar nas análises do banco de dados constituído ao longo do projeto, visando novas pesquisas.

REFERÊNCIAS

ARTEAGA, P.; BATANERO, C.; DIAZ, C.; CONTRERAS, J. M. El lenguage de los gráficos estadísticos. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 18, p. 93-104, 2009.

BALL, D.L.; THAMES, M.H.; PHELPS, G.C. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education,** v. 59, p. 5, p. 389-407, 2008.

BATANERO, C., ESTEPA, A.; GODINO, J. D. Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria . ***Suma***, 9, p. 25-31. 1991. Disponível em: http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm. Acesso em: março/2009.

BIGATTÃO JR., P. A. **Concepção do Professor de Matemática sobre o Ensino da Estatística.** Dissertação (Mestrado) - PUC-SP, 2007. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO / Secretaria De Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais 3:** Matemática (1ª a 4ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO / Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF. 1998. Volume: Matemática.

CANOSSA R. **A Estatística no Ensino Médio:** uma sequência didática trabalhada com professores. Dissertação (Mestrado) - PUC-SP. 2009. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat

CARDOSO, R. **O professor de matemática e a análise exploratória de dados no ensino médio.** Dissertação (Mestrado) - PUC-SP, 2007. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat

CARVALHO, C. Aceitar o desafio de ouvir os alunos: O exemplo da estatística. In: CIEFCUL (Ed.).**Itinerários Investigar em Educação.** Lisboa: Centro de Investigação em Educação da FCUL, 2003. p. 537-546. Disponível em: http://cie.fc.ul.pt/membros/ccarvalho/index.htm. Acesso em: 5 de julho de 2007.

COOPER, L. L.; SHORE. F. S. The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. **Journal of Statistics Education**, v. 18, n.2, 2010. Disponível em: http://www.amstat.org/publications/jse/v18n2/cooper.pdf

COUTINHO, C. Q. S. Teaching Statistics in Elementary and High School and Teacher Training. In: BATANERO, C.;BURRILL, G.; READING, C.; ROSSMAN,A. (Eds.). **Joint ICMI/IASE Study:** Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings

of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Disponível em: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/. Acesso em: 19/10/2011.

COUTINHO, C.Q.S; SILVA, M.J.F.; A. G. ALMOULOUD, S. Desenvolvimento do Pensamento Estatístico e sua articulação com a Mobilização de Registros de Representação Semiótica. **Bolema**, v. 24, n.39, p. 495-514, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano – registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Tradução de L.F. LEVY; M. R.SILVEIRA. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. (fascículo 1).

FRIEL, S. N.; CURCIO, F.; BRIGHT, G. W. Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in MathematicsEducation, v.* 32, n. 2, p. 124-158, 2001.

FRIOLANI, L. C. **O pensamento estocástico nos livros didáticos do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado). PUC-SP, 2007. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat.

GAL, I. Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. **International Statistical Revew**, v. 70, n. 1, p. 1-50, 2002.

GARCIA, F. de M. **A abordagem das medidas de posição e a percepção da variabilidade em um conjunto de dados com alunos do Ensino Fundamental II.** Dissertação (Mestrado em educação matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2008. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat.

GARFIELD, J. The Challenge of Developing Statistical Reasoning. ***Journal of Statistics Education,*** v. 10, n.3, 2002. Disponível em: www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html. Acesso em: 05 de julho de 2007.

GATTUSO, L. Statistics and Mathematics. Is it possible to create fruitful links? In: A. ROSSMAN; B. CHANGE (Eds.)., **Proceedings of the Seventh**

International Conference on Teaching Statistics. CD ROM. Salvador (Bahia): IASE and ISI. 2006.

KINCHELOE, J. L. **A formação do professor como compromisso político.** Mapeando o pós-moderno.Porto Alegre: ArtesMédicas, 1997.

PFANNKUCH, M. Training teachers to develop statistical thinkin. In: Joint ICMI/IASE Study: teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education, 18th, 2008. **Proceedings..,** 2008. (BATANERO, C.; BURRIL, G.; READING C.; ROSSMAN, A. (Eds)).Disponível em:<http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/>.

SANCHEZ, E.; SILVA, C.B.; COUTINHO, C. Teachers' understanding of variation. In: BATANERO, Burrill, Reading(Eds.).**Teaching Statistics in School Mathematics – challenges for teaching and teacher education.** International Commission on Mathematical Instruction; Springer. 2011. p. 211-222.

SHAMOS, M. H. **The myth of scientific literacy.** New Brunswick: Rutgers University Press, 1995.

SILVA, C. B. **Pensamento Estatístico e raciocínio sobre variação:** um estudo com Professores de Matemática. Tese (Doutorado) - PUC-SP: 2007. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat

VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na Educação. In: VALENTE, J. A.(Org.).**Computadores e conhecimento, repensando a Educação**, UNICAMP-NIED, 1993. p.1-23

VIEIRA, M. **Análise Exploratória de dados: Uma abordagem com alunos do Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) - PUC – SP, 2008. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat.

WILD, C. J.; PFANNKUCH, M. Statistical thinking in empirical enquiry. **International Statistical Review**, Auckland, v.67, n.3, p. 223-265, 1999.

SOBRE OS AUTORES

ANA LÚCIA PEREIRA BACCON

Doutora (2011) e Mestre (2005) em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Especialização em Educação Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná UENP (1996). Possui graduação em Ciências e Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná UENP (1994). Professor Adjunto na Universidade Estadual de Ponta Grossa no Departamento de Matemática e Estatística e no Programa de Pós-Graduação em Educação (Mestrado e Doutorado) na UEPG . Professora de Matemática na Rede Pública no Estado do Paraná (1994-2012). Cargos exercidos: Vice-coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação (Mestrado e Doutorado) na UEPG (Universidade Estadual de Ponta Grossa 2014/2015). Coordenação Institucional do PIBID/UEPG ? 2012/2013. Coordenadora de Gestão e Processos Educacionais PIBID/UEPG desde 2013. Chefe do Núcleo Regional de Educação de Jacarezinho (2009-2010). Presidente da APP- Sindicato dos Trabalhadores em Educação Núcleo Regional de Jacarezinho (2002-2009). Atualmente é líder do Grupo de Pesquisa GEPPE (Grupo de Estudo e Pesquisa Políticas Educacionais e Formação de Professores). Membro do corpo editorial (Editor Associado) de Frontiers in Educational Psychology. Desenvolve pesquisas nas seguintes linhas: Políticas Educacionais e Formação de professores; Desenvolvimento curricular e práticas pedagógicas; Ensino e aprendizagem; Psicanálise e Educação Matemática.

ANDRÉA DAMASCENO RAUPP

Possui graduação em Lic. Plena em Ciências e Matemática do 1º Grau pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (1992), Especialização no ensino de Físcia e Mestrado em Educação pela Universidade de Passo Fundo. Atualmente é professora de matemática de 4ª à 6ª séries e Física na 8ª série da Escola Redentorista Instituto Menino Deus. Tem experiência na área de Matemática e Ciências (introdução física), com ênfase em Matemática Ensino Fundamental e regência de classe com turmas de 1ª a 4ª série do Ensino Fundamental. Atua em cursos de formação continuada para professores do

ensino fundamental, promovidos pela Educar- Assessoria Educacional e pela CRE - Centro Regional de Educação da Universidade de Passo Fundo.

ANGELA APARECIDA PASINATO DALSASSO

Possui graduação em Pedagogia pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (2002), especialista em educação matemática para séries iniciais (Unioeste). Atualmente é professora da Rede Municipal de Educação de Cascavel. Tem interesse nas áreas de formação do professor e alfabetização.

CELIA FINCK BRANDT

Possui graduação em Licenciatura Em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (1976), Mestrado em Educação pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (1997) e doutorado em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (2005). Atualmente é - professor adjunto a da Universidade Estadual de Ponta Grossa. Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em Aprendizagem da Matemática e Formação de professores de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: sistema de numeração, formação de professores, aprendizagem de matemática, registros de representações semióticas e a conceitualização em matemática , epistemologia genética e matemática,e educação matemática.

CILEDA DE QUEIROZ E SILVA COUTINHO

Possui graduação em Licenciatura Plena em Matematica pela Pontifíca Universidade Católica de São Paulo (1979), graduação em Bacharelado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1978), mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1993) e doutorado em Didatica da Matematica - Université Joseph Fourier - Grenoble I (2001). Professora assistente doutor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática e no curso de Licenciatura em Matemática, modalidade a distância. Atua também na Universidade Católica de Santos como assessora técnica da Comissão Própria de Avaliação, grupo que coordena a autoavaliação Institucional nesta universidade. Tem experiência na área de Matemática,

com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino-aprendizagem, educação estatística e financeira, formação de professores. livro didático. Participa (vice-coordenadora) do grupo de pesquisa Pea-mat, coordenado pelo prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, no qual desenvolveu o projeto PEA-ESTAT, que trata especificamente do Ensino e da Aprendizagem da Estatística (Descritiva, Probabilidade e Inferencial) e da Combinatória, com financiamento da FAPESP. Ainda trabalha na análise dos dados coletados nesse projeto, hoje atualizado para um novo projeto, ainda na área de Educação Estatística mas incluindo Educação Financeira. Coordenadora do GT12-Ensino de Probabilidade e Estatística, pertencente à Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, no período 2009-2012.

CLÉLIA MARIA IGNATIUS NOGUEIRA

Possui graduação em Licenciatura Em Matemática pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Tupã (1973), mestrado em Matemática pela Universidade de São Paulo (1979) e doutorado em Educação pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (2002). Atualmente é professora convidada do programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá e docente no Centro de Estudos Superiores de Maringá - CESUMAR. Atua na área de Educação, com pesquisas nas áreas de Educação Matemática; Educação de Surdos e em Epistemologia Genética. É autora de livros didáticos de Educação Matemática e de Libras para cursos de Pedagogia e de Educação Especial na modalidade a distância. Autora de livros sobre ensino de matemática segundo a perspectiva da epistemologia genética e sobre o ensino de matemática para surdos. É revisora dos seguintes periódicos: Zetétikè (Unicamp); Acta Scienciarum (UEM); RBEP (INEP); EMR: Educação Matemática em revista (SBEM); Ensaio: pesquisa em educação em ciências (UFMG); Psicologia em Estudo (UEM); Schème (UNESP); Práxis (UEPG); Em Teia(UFPE) e RPEM (Unespar). Participa dos seguintes grupos de pesquisa GIEPEM: Grupo Interdisciplinar de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (UEM); GEPEGE: Grupo de Estudos e Pesquisas em Epistemologia Genética e Educação (UNESP / Marília) e GEPSEM: Grupo de Estudos e Pesquisas em Surdez e Ensino de Matemática (UNESPAR). membro do GPEMCAM: Grupo de Pesquisas em Educação Matemática de Campo Mourão (UNESPAR); Vice

coordenadora do GT1: Educação Matemática na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental e membro fundadora do GT13: Diferença, Inclusão e Educação Matemática da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática).

ETTIÈNE CORDEIRO GUÉRIOS

Professora Titular na Universidade Federal do Paraná. Possui graduação em Licenciatura em Matemática (1976), graduação em Licenciatura em Pedagogia (1982), Especialização em Metodologia do Ensino nas Séries Iniciais (1988) e mestrado em Educação pela Universidade Federal do Paraná (1988). Possui doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2002). Atua no Departamento de Teoria e Prática de Ensino, no Programa de Pós Graduação em Educação (Acadêmico) e no Programa de Pós Graduação em Educação: Teoria e Prática de Ensino (Profissional). Membro da coordenação do Núcleo de Estudos e Pesquisas sobre Professores que ensinam Matemática (NEPPREM) e da coordenação do Núcleo Disciplinar Educação para Integração da Associação de Universidades Grupo Montevideo (AUGM). Membro do Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática e Ciências Físicas e Biológicas da UFPR. Diretora do Setor de Educação da UFPR (2006-1010). Vice Presidente Região Sul (2008-2009) e Vice Presidente Nacional (2010) do Fórum Nacional de Faculdades de Educação de Instituições Públicas Brasileiras (FORUMDIR). Representante institucional da Cátedra UNESCO Inovações Pedagógicas no Ensino Superior (2002-2012). Coordenadora adjunta e pedagógica do Centro Interdisciplinar de Formação Continuada de Professores da Educação Básica da Rede Nacional de Formação de Professores do MEC (2004 -2006). Secretária Geral fundadora da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM-PR,1998) e Primeira Secretária (2007-2010 e 2010-2013). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática e em Cognição, Aprendizagem e Desenvolvimento Humano, atuando principalmente nos seguintes temas: formação de professores (inicial e continuada), educação matemática, ensino de matemática, didática e metodologia do ensino em todos os níveis, educação a distância.

IDEMAR VIZOLLI

Possui Licenciatura em em Ciências Naturais pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande Do Sul (1985) e Matemática pela Universidade do Contestado (1997), Especialização em Ciências 5ª a 8ª Séries pela Universidade Regional de Blumenau, Mestrado em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina (2001) e Doutorado em Educação Educação pela Universidade Federal do Paraná (2006). Tem experiência na EJA, Educação Básica e no Ensino Superior. Atualmente é professor Adjunto no Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Tocantins, Campus de Arraias e no Programa de Mestrado em Educação, Campus de Palmas. Atua na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, Educação do Campo e Educação de Jovens e Adultos.

LILIAN AKEMI KATO

Graduada em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (1992), mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (1996) e doutora em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (2004). Atualmente é professora associada da Universidade Estadual de Maringá. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Biomatemática, atuando principalmente nos seguintes temas: modelagem matemática e ensino de Ciências e Educação Matemática.

LOUISIANNE CHRISTINE BONZANINI

Possui graduação em Pedagogia pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (2002), especialista em educação matemática para séries iniciais (Unioeste). Atualmente é professora da Rede Municipal de Educação de Cascavel. Tem interesse nas áreas de formação do professor e alfabetização.

LUCILENE LUSIA ADORNO DE OLIVEIRA

Possui graduação em Ciências Complementação Em Matemática pela Fundação Faculdade de Filosofia Ciências E Letras de Mandaguari (1979) , mestrado em EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA E O ENSINO DA MATEMÁTICA pela Universidade Estadual de Maringá (2006) e Doutorado em Educação para a

Ciência e o Ensino da Matemática pela UEM (2015). Atualmente é professor - FACULDADES INTEGRADAS DO VALE DO IVAI e professor titular - Secretaria de Estado da Educação do Paraná atuando no PROEDUSE-Programa Educacional de Socioeducação/CENSE- Maringá. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: socioeducação, eja, prática pedagógica, conceitos matemáticos, modelagem matemática, análise de erros, campos conceituais, políticas educacionais, diretrizes curriculares, autoria e análise de discurso na matemática.

MARCELI BHEM GOULART

Possui graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (1999), mestrado em Modelagem Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (2001) e doutorado em Educação pela Universidade Federal do Paraná (2009). Atualmente é professor adjunto C da Universidade Estadual de Ponta Grossa. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação, atuando principalmente nos seguintes temas: educação matemática, ensino, tecnologias da informação e comunicação, formação de professores e PIBID.

MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA

Possui graduação em Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1988), graduação em Jornalismo Não Concluido pela Universidade Católica de Santos (1972), Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1997) e Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2005). Atualmente é professora Asssitente doutor da Graduação, do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática e da Especialização em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino e aprendizagem de Matemática, Tecnologia da Informação e Comunicação e formação de professores de matemática com ênfase em números fracionários e geometria.

MÉRICLES THADEU MORETTI

Professor titular voluntário da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT). Doutor em Educação Matemática - Universidade Louis Pasteur (Estrasburgo I (1992)). Pós-doutor pela Universidade de Lisboa (2008-2009). Mestre em Matemática Aplicada - Unicamp (1979). Licenciado em Matemática - UFSC (1977). Na UFSC, entre outras atividades, foi Chefe de Departamento, Diretor e Vice-Diretor do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Presidente da Comissão de Avaliação Institucional, membro do Conselho Universitário e da Câmara de Pesquisa Central. Pesquisa na área de Educação Matemática com ênfase em Semiótica e Aprendizagem Matemática. Editor da REVEMAT (Revista Eletrônica de Educação Matemática). Líder do Grupo de Pesquisa - GPEEM. Orienta, atualmente, 5 doutorandos e 2 mestrandos. Professor Pesquisador do CNPq.

NEIVA IGNÊS GRANDO

Possui graduação em Ciências/Matemática Licenciatura Plena pela Universidade de Passo Fundo (1974), mestrado em Psicologia (Psicologia Cognitiva) pela Universidade Federal de Pernambuco (1988), doutorado pela Universidade Federal de Santa Catarina (1998), com sanduiche pela Université de Rouen (1996-1997) e pós-doutorado em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina (2006). É professora titular da Universidade de Passo Fundo, com experiência na área de Educação, com ênfase em Psicologia Cognitiva e Educação Matemática, desenvolvendo pesquisas principalmente em temas relacionados à educação matemática, aprendizagem e desenvolvimento do pensamento. Atua como professora pesquisadora no Programa de Pós-graduação em Educação (PPGEDU), na linha de pesquisa Processos educativos e linguagem e no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM), na linha de pesquisa Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino de Ciências e Matemática. É líder do Grupo de pesquisa Teoria Histórico-cultural e Educação Matemática (CNPq).

PATRÍCIA SANDALO PEREIRA

Possui graduação em Ciências Habilitação Plena Em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia (1985), mestrado em Educação Matemática (1997) e doutorado em Educação Matemática (2005) pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP - Rio Claro. Atualmente é Diretora do Instituto de Matemática e Docente do curso de Licenciatura em Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Líder do Grupo de Pesquisa FORMEM - Formação e Educação Matemática. Coordenadora do projeto em rede ?Trabalho colaborativo com professores que ensinam Matemática na Educação Básica em escolas públicas das regiões Nordeste e Centro-Oeste?, financiado pelo Programa Observatório da Educação - CAPES na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS (Instituição sede). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente com Formação de Professores.

REGINA MARIA PAVANELLO

Possui graduação em Matemática pela Faculdade de Filosofia Ciêncas e Letras Sedes Sapientiae(1964), especialização em Especialização Em Estatística pela Faculdade de Filosofia Ciêncas e Letras Sedes Sapientiae(1965), mestrado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas(1989) e doutorado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas(1995). Atualmente é Professor Pesquisador da Universidade Estadual de Maringá, Revisor de periódico da Zetetike (UNICAMP), Revisor de periódico da Acta Scientiarum (UEM), Revisor de periódico da Ciência e Educação (UNESP), Revisor de periódico da Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), Revisor de periódico do Educação Matemática Pesquisa (Impresso), Revisor de periódico da Perspectivas da Educação Matemática e Revisor de periódico da Ensaio: Pesquisa em Educação em Ciências (Impresso). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Tópicos Específicos de Educação. Atuando principalmente nos seguintes temas:cognição, desenvolvimento cognitivo, noções geométricas, possibilidades cognitivas.

SADDO AG ALMOULOUD

Concluiu o doutorado em mathematiques et applications - universite de rennes i em 1992. Assistente doutor - pontifícia universidade católica de são paulo, e assistente doutor da fundação santo andre. Consultor ad hoc da fundação de amparo a pesquisa do estado de são paulo , da capes, bolsista pesquisador de cnpq, foi coordenador do programa de estudos pós-graduados em educação matemática da puc/sp de 2007 à 2009. É atualmente coordenador do referido programa desde 01/08/2013. É coordenador do curso de especialização em educação matemática da puc/sp desde 2006. Publicou mais 28 artigos em periódicos especializados e mais de 83 trabalhos em anais de eventos. Possui 5 capítulos de livros e 12 livros publicados. Possui 1 software e mais de 62 itens de produção técnica. Participou de 5 eventos no exterior e mais de 112 no brasil. Orientou mais 50 dissertações de mestrado e teses de doutorado na área de educação matemática. Entre 1996 e 2013. Participou de pelo menos 80 bancas de defesa de dissertações e doutorados. Coordenou mais de 5 projetos de pesquisa. Atualmente coordena 2 projeto de pesquisa. Atua na área de educação, com enfase em educação matemática. Foi coordenador do programa de estudo pós-graduados em educação matemática da puc-sp. Coordena novamente este programa desde agosto de 2013. Em suas atividades profissionais interagiu com 50 colaboradores em co-autorias de trabalhos científicos. Em seu currículo lattes os termos mais frequentes na contextualização da produção cientifica, tecnológica e artístico-cultural são: ensino-aprendizagem, geometria, educação matemática, matemática, demonstração, ensino básico, formação de professores, geometria dinâmica.

SAMUEL EDMUNDO LOPEZ BELLO

Possui graduação em Licenciatura em Matemática - Universidad Inca Garcilaso de La Vega (1990), mestrado em Educação pela Universidade Federal do Paraná (1995) e doutorado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (2000). Atualmente é professor associado ii da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Formação de Professores, atuando principalmente nos seguintes temas: formação de professores, educação matemática, currículo - interdisciplinaridade, ensino de matemática e etnomatemática.

SELMA FELISBINO HILLESHEIM

Mestra em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina (2013). Especialista em Gestão e Metodologia do Ensino-FACEMED (2004) . Licenciada em Ciências - UNISUL (2000). Participa do Grupo de Pesquisa -GPEEM. Seus estudos são voltados para o processo de ensino e aprendizagem da matemática pautados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Participou como formadora dos orientadores de estudo no PNAIC (Programa Nacional pela Alfabetização na Idade Certa), coordenado pela UFSC no ano de 2014. Tem experiência na área da educação, atuando como professora de matemática na Educação Básica e como formadora de professores que ensinam matemática nos mais variados níveis de ensino.

TÂNIA STELLA BASSOI

Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (1975), mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual do Centro-Oeste (1998) e doutorado em Educação pela Universidade Federal do Paraná (2006). Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, do colegiado de Matemática. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação atuando principalmente nos seguintes temas: matemática, ensino, ensino fundamental e médio e formação de professores. Faz parte de grupo de pesquisa Formação de professores em Ciências e Matemática.

VALDINEI CEZAR CARDOSO

Graduado em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá(2001), Especialista em Educação Matemática pela União das Escolas Superiores do Vale do Ivaí (2002), Mestre em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática pela Universidade Estadual de Maringá(2010). Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (2014). Professor Adjunto do Departamento de Ciências e membro permanente do corpo docente do Mestrado Profissional em Rede Nacional para o Ensino das Ciências Ambientais (PROF-CIAMB) da Universidade Estadual de Maringá. Atua na área de ensino de Matemática com ênfase na Modelagem

Matemática na educação matemática, jogos digitais, modelos mentais, teoria dos campos conceituais, teoria cognitiva da aprendizagem multimídia, teoria das Representações Semióticas, vídeos digitais no ensino de matemática, educação à distância e novas tecnologias.